Correction des exercices de la fiche 8

Attention : tous les exercices concernant la convergence en probabilité sont hors programme.

1 Approximations

a Comme on effectue une succession de 400 **épreuves de Bernoulli** (dont le succès est d'obtenir "pile" avec une probabilité de 1/2), indépendantes et de même paramètre 1/2, il est clair que :

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(400, \frac{1}{2}\right)}$$

b D'après le cours, nous avons que :

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = 200 \quad \mathbb{V}(X) = 100 \quad \sigma(X) = 10}$$

c Pour les calculs des probabilités, nous utiliserons le fait que, comme $n = 400 \geq 200$ et $p = \dfrac{1}{2}$ nous sommes dans les conditions pour dire que $X \underset{\simeq}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(200, 100)$. Nous devrons, alors, introduire $X^* = \dfrac{X - 200}{10}$ la variable centrée et réduite associée à X, dont le théorème fondamental, nous permet de dire que $X^* \underset{\simeq}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(0,1)$. Ainsi, avec la correction de continuité :

- $$\begin{aligned} \mathbf{P}([X>200]) &= \mathbf{P}([X\geq 201]) \\ &= \mathbf{P}([X\geq 200,5]) \\ &= \mathbf{P}\left(\left[\frac{X-200}{10}\geq\frac{200,5-200}{10}\right]\right) \\ &= \mathbf{P}([X^*\geq 0,05]) \\ &= 1-\mathbf{P}([X^*<0,05]) \\ &\simeq 1-\Phi(0,05) \\ &\simeq 1-0,51994 \\ &\simeq \boxed{0,48006} \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \mathbf{P}([190<X<210]) &= \mathbf{P}([191\leq X\leq 209]) \\ &= \mathbf{P}([190,5\leq X\leq 209,5]) \\ &= \mathbf{P}\left(\left[\frac{190,5-200}{10}\leq\frac{X-200}{10}\leq\frac{209,5-200}{10}\right]\right) \\ &= \mathbf{P}([-0,95\leq X^*\leq 0,95]) \\ &\simeq \Phi(0,95)-\Phi(-0,95) \\ &\simeq 2\Phi(0,95)-1 \\ &\simeq 2\times 0,82894-1 \\ &\simeq \boxed{0.65788} \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \mathbf{P}([185<X<205]) &= \mathbf{P}([186\leq X\leq 204]) \\ &= \mathbf{P}([185,5\leq X\leq 204,5]) \\ &= \mathbf{P}\left(\left[\frac{185,5-200}{10}\leq\frac{X-200}{10}\leq\frac{204,5-200}{10}\right]\right) \\ &= \mathbf{P}([-1,45\leq X^*\leq 0,45]) \\ &\simeq \Phi(0,45)-\Phi(-1,45) \\ &\simeq \Phi(0,45)-(1-\Phi(1,45)) \\ &\simeq \Phi(0,45)+\Phi(1,45)-1 \\ &\simeq 0,67364+0,92647-1 \\ &\simeq \boxed{0.60011} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \mathbf{P}([X=201]) &= \mathbf{P}([200,5\leq X\leq 201,5]) \\ &= \mathbf{P}\left(\left[\frac{200,5-200}{10}\leq\frac{X-200}{10}\leq\frac{201,5-200}{10}\right]\right) \\ &= \mathbf{P}([0,05\leq X^*\leq 0,15]) \\ &\simeq \Phi(0,15)-\Phi(0,05) \\ &\simeq 0.55962-0.51994 \\ &\simeq \boxed{0,03968} \end{aligned}$$

2 Approximations

Soit X la variable aléatoire associée au nombre de personnes sujets de troubles parmi les 200. Comme on effectue une succession de 200 **épreuves de Bernoulli** (dont le succès est que la personne soit sujet de troubles), indépendantes et de même paramètre 0,001, il est clair que :

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}(2000;0,001)}$$

Pour les calculs des probabilités, nous utiliserons le fait que, comme $n=2000\geq 30$, $p=0,001<0,1$,

$np = 2 < 10$ nous sommes dans les conditions pour dire que $X \underset{\simeq}{\hookrightarrow} \mathcal{P}(2)$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\bullet\ \mathbf{P}([X=3]) &\simeq \frac{e^{-2}2^3}{3!} \\
&\simeq \frac{4}{3}e^{-2} \\
&\simeq \boxed{0.180\,45} \\
\bullet\ \mathbf{P}([X>2]) &= 1-\mathbf{P}([X\leq 2]) \\
&= 1-(\mathbf{P}([X=0])+\mathbf{P}([X=1])+\mathbf{P}([X=2])) \\
&\simeq 1-e^{-2}\left(\frac{2^0}{0!}+\frac{2^1}{1!}+\frac{2^2}{2!}\right) \\
&\simeq \boxed{0.32332}
\end{aligned}$$

3 Approximations

a Soit X la variable aléatoire associée au nombre de décès par an dus à la maladie dans la population de N personnes. Comme on effectue une succession de N épreuves de Bernoulli (dont le succès est que la personne soit décédée, de probabilité $400/1.10^6$), indépendantes et de même paramètre $400/1.10^6$, il est clair que :

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(N, \frac{400}{10^6}\right) \iff X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(N, 4.10^{-4}\right)}$$

D'après le cours, nous avons :

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = 4.10^{-4}N \quad \mathbb{V}(X) = 4.10^{-4}\left(1-4.10^{-4}\right)N = 3.5263\times 10^{-3}N}$$

b

- $N = 1000$
  Comme $N = 1000 \geq 30$, $p = 4.10^{-4} < 0,1$, $Np = 0,4 < 10$ alors $X \underset{\simeq}{\hookrightarrow} \mathcal{P}(0,4)$ soit :

$$\forall k \in \mathbb{N},\quad \mathbf{P}([X=k]) \simeq \frac{e^{-0,4}(0,4)^k}{k!}$$

  Cherchons k tel que $\mathbf{P}([X\leq k]) \geq 0,95$. Nous avons :

k	$\mathbf{P}([X=k])$	$\mathbf{P}([X\leq k])$
0	0.67032	0.67032
1	0.26813	0.93845
2	5.3626×10^{-2}	0.99208

$\boxed{\text{Finalement la probabilité de constater au plus deux décès est au moins égale à 95\%}}$

- $N = 10\,000$
  Comme $N = 10000 \geq 30$, $p = 4.10^{-3} < 0,1$, $Np = 4 < 10$ alors $X \underset{\simeq}{\hookrightarrow} \mathcal{P}(4)$ soit :

$$\forall k \in \mathbb{N},\quad \mathbf{P}([X=k]) \simeq \frac{e^{-4}(4)^k}{k!}$$

  Cherchons k tel que $\mathbf{P}([X\leq k]) \geq 0,95$. Nous avons :

k	$\mathbf{P}([X=k])$	$\mathbf{P}([X \leq k])$
0	$1,8316.10^{-2}$	$1,8316.10^{-2}$
1	$7,3263.10^{-2}$	$0,091579$
2	$0,14653$	$0,238109$
3	$0,19537$	$0,433479$
4	$0,19537$	$0,628849$
5	$0,15629$	$0,785139$
6	$0,1042$	$0,889339$
7	$0,05954$	$0,948879$
8	$0,02977$	$0,978649$

$\boxed{\text{Finalement la probabilité de constater au plus huit décès est au moins égale à } 95\%}$

- $N = 100\ 000$
  Comme $N = 100000 \geq 30$, $Np = 353.89 > 10$, $N(1-p) = 99646 > 10$ nous sommes dans les conditions pour dire que $X \underset{\simeq}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(354; 352.63)$. Nous devrons alors introduire $X^* = \dfrac{X-354}{18.8}$ la variable centrée et réduite associée à X dont le théorème fondamental, nous permet de dire que $X^* \underset{\simeq}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(0,1)$. Ainsi, avec la correction de continuité :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([X \leq k]) &= \mathbf{P}([X \leq k+0,5]) \\
&= \mathbf{P}\left(\left[\frac{X-354}{18.8} \leq \frac{k+0,5-354}{18.8}\right]\right) \\
&= \mathbf{P}\left(\left[X^* \leq 5.319\,1 \times 10^{-2}k - 18.803\right]\right) \\
&\simeq \Phi\left(5.\,319\,1 \times 10^{-2}k - 18.803\right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([X \leq k]) \geq 0,95 &\iff \Phi\left(5.319\,1 \times 10^{-2}k - 18.803\right) \geq 0,95 \\
&\iff 5.319\,1 \times 10^{-2}k - 18.803 \geq 1,65 \\
&\iff (k \geq 384)
\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{X \leq 384 \text{ à } 95\% \text{ près}}$$

4 Approximations

Soit X la variable aléatoire associée au nombre de clients, parmi les 150, achetant au cours de la journée une boîte d'aspirine dans la pharmacie. Comme on effectue une succession de 150 **épreuves de Bernoulli** (dont le succès est que la personne achete au cours de la journée une boîte d'aspirine, de probabilité 0,02), indépendantes et de même paramètre 0,02, il est clair que :

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}(150; 0,02)}$$

Comme $n = 150 \geq 30$, $p = 0.02 < 0,1$, $np = 3 < 10$ alors $X \underset{\simeq}{\hookrightarrow} \mathcal{P}(3)$ soit :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}([X=k]) \simeq \frac{e^{-3}(3)^k}{k!}$$

Cherchons alors k tel que $\mathbf{P}([X \leq k]) \geq 0,98$. Nous avons :

k	$\mathbf{P}([X=k])$	$\mathbf{P}([X \leq k])$
0	$0,04979$	$0,04979$
1	$0,14936$	$0,19915$
2	$0,22404$	$0,42319$
3	$0,22404$	$0,64723$
4	$0,16803$	$0,81526$
5	$0,10082$	$0,91608$
6	$0,05041$	$0,96649$
7	$0,02160$	$0,98810$

Le stock minimum pour que la pharmacie puisse satisfaire à la demande avec une probabilité de 98%.est de 7 boîtes

5 Convergence en loi

a Par définition :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad F_n(x) = \mathbf{P}([M_n \leq x])$$

et :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \;\; F_n(x) &= \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k \leq x]\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}([X_k \leq x]) \text{ car les variables } X_k \text{ sont indépendantes} \\
&= \prod_{k=1}^{n} F(x) \\
&= (F(x))^n
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad F_n = F^n}$$

b Pour cela introduisons F_{Z_n} la fonction de répartition associée à Z_n qui reste une variable à densité, car obtenue à partir d'un changement affine à partir de M_n.Elle est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{Z_n}(x) = \mathbf{P}([Z_n \leq x])$$

et :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \;\; F_{Z_n}(x) &= \mathbf{P}([\lambda M_n - \ln n \leq x]) \\
&= \mathbf{P}([\lambda M_n \leq x + \ln n]) \\
&= \mathbf{P}\left(\left[M_n \leq \frac{x+\ln n}{\lambda}\right]\right) \text{ car } \lambda > 0 \\
&= F_n\left(\frac{x+\ln n}{\lambda}\right) \\
&= \left(F\left(\frac{x+\ln n}{\lambda}\right)\right)^n \text{ selon la question précédente} \\
&= \begin{cases} \left(1 - \exp\left(-\lambda\left(\dfrac{x+\ln n}{\lambda}\right)\right)\right)^n & \text{si} \quad x + \ln n \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x + \ln n < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} (1 - \exp(-x - \ln n))^n & \text{si} \quad x + \ln n \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x + \ln n < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \left(1 - \dfrac{e^{-x}}{n}\right)^n & \text{si} \quad x + \ln n \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x + \ln n < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Maintenant sachant que x est fixé dans $\mathbb{R}$, étudions $\lim_{n\to+\infty} F_{Z_n}(x)$.
Pour n *assez grand*, $(x+\ln n)$ sera **toujours** positif, ainsi $\lim_{n\to+\infty} F_{Z_n}(x)=\exp(-e^{-x})$ car :

$$\left(1-\frac{e^{-x}}{n}\right)^n=\exp\left(n\ln\left(1-\frac{e^{-x}}{n}\right)\right)$$

et

$$n\ln\left(1-\frac{e^{-x}}{n}\right)\underset{+\infty}{\sim}-e^{-x}$$

Par continuité de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, pour x fixé dans $\mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{e^{-x}}{n}\right)^n=\exp\left(-e^{-x}\right)$$

Notons G la "fonction limite" obtenue, elle est définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad G(x)=\exp(-e^{-x})$$

Nous avons :

$$\begin{cases}\bullet\ G\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})\ \text{ donc } G\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}),\\ \bullet\ \lim\limits_{-\infty}G=0,\\ \bullet\ \lim\limits_{+\infty}G=1,\\ \bullet\ \forall x\in\mathbb{R},\ G'(x)=e^{-x}\exp(-e^{-x})>0 \text{ donc } G \text{ est strictement croissante.}\end{cases}$$

Toutes ces propriétés nous amènent à dire que G est une fonction de répartition et que :

$$\boxed{(Z_n)_{n\geq1}\xrightarrow{\mathcal{L}}Z}$$

où Z est une variable à densité, dont une densité f_Z est obtenue par dérivation de G sur $\mathbb{R}$, est définie par :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\quad f_Z(x)=\exp\left(-\left(x+e^{-x}\right)\right)}$$

c.i Introduisons F_{Z_n} la fonction de répartition associée à Z_n qui reste une variable à densité, car obtenue à partir d'un changement affine à partir de M_n. Elle est définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \forall x\in\mathbb{R},\quad F_{Z_n}(x)=\mathbf{P}([Z_n\leq x])$$

et :

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \forall x\in\mathbb{R},\ F_{Z_n}(x)&=\mathbf{P}\left(\left[n^{\frac{1}{a}}(M_n-1)\leq x\right]\right)\\&=\mathbf{P}\left(\left[M_n-1\leq n^{-\frac{1}{a}}x\right]\right)\\&=\mathbf{P}\left(\left[M_n\leq n^{-\frac{1}{a}}x+1\right]\right)\\&=F_n\left(n^{-\frac{1}{a}}x+1\right)\\&=\left(F\left(n^{-\frac{1}{a}}x+1\right)\right)^n\end{aligned}$$

Ici quand n est très grand, $n^{-\frac{1}{a}}$ est très petit, dés lors $n^{-\frac{1}{a}}x+1$ est très proche de 1. Mais le problème est que l'on ne sait pas pour x fixé dans $\mathbb{R}$, si $n^{-\frac{1}{a}}x+1$ est supérieur ou inférieur à 1. Tout dépend du signe de x. Donc :

- si $x\geq0$, alors $n^{-\frac{1}{a}}x+1\geq1$ et :

$$\begin{aligned}\left(F\left(n^{-\frac{1}{a}}x+1\right)\right)^n&=1^n\\&=1\end{aligned}$$

- si $x < 0$, alors $n^{-\frac{1}{a}}x + 1 < 1$ et :

$$\begin{aligned}\left(F\left(n^{-\frac{1}{a}}x+1\right)\right)^n &= \left(1-\left(-xn^{-\frac{1}{a}}\right)^a\right)^n \\ &= \left(1-\frac{1}{n}(-x)^a\right)^n \\ &= \exp\left(n\ln\left(1-\frac{1}{n}(-x)^a\right)\right)\end{aligned}$$

Ces deux résultats étant bien sûr donnés pour n grand ! Alors :

- si $x \geq 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{Z_n}(x) = 1$.
- si $x < 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} F_{Z_n}(x) = \exp\left(-(-x)^a\right) \quad \text{car} \quad n\ln\left(1-\frac{1}{n}(-x)^a\right) \underset{+\infty}{\sim} -(-x)^a$$

et par continuité de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, pour x fixé dans $\mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \exp\left(n\ln\left(1-\frac{1}{n}(-x)^a\right)\right) = \exp\left(-(-x)^a\right)$$

Moralité : En notant H la "fonction limite" obtenue, elle est définie par :

$$H(x) = \begin{cases} \exp\left(-(-x)^a\right) & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

H possède clairement toutes les propriétés d'une fonction de répartition associée à une variable à densité, car :

$$\begin{cases} \bullet & H \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ \ \textit{(à vérifier, c'est évident!)}, \\ \bullet & H \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}_-^*,\mathbb{R}\right) \text{ et } H \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R}\right), \\ \bullet & \lim\limits_{-\infty} H = 0, \\ \bullet & \lim\limits_{+\infty} H = 1, \\ \bullet & \begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ H'(x) = -(-x)^a \frac{a}{x} e^{-(-x)^a} > 0 \text{ et} \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ H'(x) = 0 \geq 0 \text{ donc } H \text{ est strict. } \nearrow \end{array} \end{cases}$$

Conclusion :

$$\boxed{(Z_n)_{n\geq 1} \xrightarrow{\mathcal{L}} T}$$

où T est une variable à densité, dont une densité f_T est obtenue par dérivation de H sur $\mathbb{R}^*$, sans oublier de poser que $f_T(0) = 0$. Elle est définie par :

$$\boxed{f_T(x) = \begin{cases} -(-x)^a \frac{a}{x} e^{-(-x)^a} > 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}_-^* \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}_+ \end{cases}}$$

c.ii Si $a = 1$, $Z_n = n(M_n - 1)$ et :

$$F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

ainsi $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$ et comme :

$$H(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

est la fonction de répartition de T, on montrerait sans difficulté que $-T \hookrightarrow \varepsilon(1)$ donc :

$$\boxed{(Z_n)_{n\geq 1} \xrightarrow{\mathcal{L}} T \quad \text{où} \quad -T \hookrightarrow \varepsilon(1)}$$

6 Convergence en loi

a Nous avons vu au TD précédent que le min d'un vecteur de VARAD reste une VARAD je ne referai donc pas la démo. Nous avons :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad Z_n(\Omega) = [0,1] \implies \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad nZ_n(\Omega) = [0,n]$$

Soit F_{nZ_n} la fonction de répartition de Z_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{nZ_n}(x) = \mathbf{P}([nZ_n \leq x])$$

-

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0,n], \ F_{nZ_n}(x) &= 1 - \mathbf{P}([nZ_n > x]) \\
&= 1 - \mathbf{P}\left(\left[Z_n > \frac{x}{n}\right]\right) \\
&= 1 - \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} \left[U_k > \frac{x}{n}\right]\right) \\
&= 1 - \left(\mathbf{P}\left(\left[U > \frac{x}{n}\right]\right)\right)^n \\
&= 1 - \left(1 - \mathbf{P}\left(\left[U \leq \frac{x}{n}\right]\right)\right)^n \text{ avec } \frac{x}{n} \in [0,1] \\
&= 1 - \left(1 - F_U\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n \\
&= 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n
\end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in]-\infty, 0[, \quad F_{nZ_n}(x) = 0$$
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in]n, +\infty[, \quad F_{nZ_n}(x) = 1$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad F_{nZ_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si} \quad x \in [0,n] \\ 1 & \text{si} \quad x > n \end{cases}$$

On doit maintenant étudier $\lim\limits_{n \to +\infty} F_{nZ_n}(x)$, x étant fixé dans $\mathbb{R}$.

- Si x est fixé dans $\mathbb{R}_-$, $\lim\limits_{n \to +\infty} F_{nZ_n}(x) = 0$.
- Si x est fixé dans $\mathbb{R}_+$ sachant que l'inégalité $x > n$ est *impossible* lorsque x est indéfiniment grand,

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to +\infty} F_{nZ_n}(x) &= \lim_{n \to +\infty} 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \\
&= \lim_{n \to +\infty} 1 - \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right) \\
&= 1 - e^{-x}
\end{aligned}$$

car :

$$\left(n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{nx}{n} \underset{+\infty}{\sim} -x$$

et par continuité de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, pour x fixé dans $\mathbb{R}_+$:

$$\lim_{n \to +\infty} \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right) = \exp(-x)$$

Moralité :

$$\boxed{(Z_n)_{n \geq 1} \xrightarrow{\mathcal{L}} Y \quad \text{où} \quad Y \hookrightarrow \varepsilon(1)}$$

b Tout d'abord en notant $Y = \varphi(X)$ où :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{-\lambda x} \end{array}$$

φ réalisant une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée non nulle sur $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$, Y reste une variable à densité avec $Y(\Omega) =]0,1]$. Soit F_Y la fonction de répartition de Y définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Y(x) = \mathbf{P}([Y \leq x])$$

et :

$$\begin{aligned}
F_Y(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \mathbf{P}\left(\left[e^{-\lambda X} \leq x\right]\right) & \text{si } x \in]0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \mathbf{P}([-\lambda X \leq \ln x]) & \text{si } x \in]0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \mathbf{P}\left(\left[X \geq -\dfrac{\ln x}{\lambda}\right]\right) & \text{si } x \in]0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \mathbf{P}\left(\left[X < -\dfrac{\ln x}{\lambda}\right]\right) & \text{si } x \in]0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - F_X\left(-\dfrac{\ln x}{\lambda}\right) & \text{si } x \in]0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \left(1 - \exp\left(-\lambda\left(-\dfrac{\ln x}{\lambda}\right)\right)\right) & \text{si } x \in]0,1] \quad \text{car } -\dfrac{\ln x}{\lambda} \geq 0 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - 1 + \exp(\ln x) & \text{si } x \in]0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x \in]0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1]) \text{ où même } Y \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1]) \text{ car } \mathbf{P}([Y=0]) = 0}$$

c.i Nous savons d'après la question précédente que $\forall k \in [[1,n]]$, $e^{-\lambda X_k} \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$ alors comme ces variables sont indépendantes, du fait de l'indépendance des variables X_k, et :

$$\boxed{(A_n)_{n\geq 1} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \text{ où } Z \hookrightarrow \varepsilon(1)}$$

c.ii Nous avons vu au TD précédent que le max d'un vecteur de VARAD reste une VARAD je ne referai donc pas la démo.

Tout d'abord $D_n(\Omega) = [-\ln n, +\infty[$. Soit F_{D_n} la fonction de répartition de D_n définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{D_n}(x) = \mathbf{P}([D_n \leq x])$$

et :

$$
\begin{aligned}
F_{D_n}(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -\ln n \\ \mathbf{P}\left(\left[\max\left(X_1, \dots, X_n\right) - \ln n \le x\right]\right) & \text{si} \quad x \ge -\ln n \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -\ln n \\ \mathbf{P}\left(\left[\max\left(X_1, \dots, X_n\right) \le x + \ln n\right]\right) & \text{si} \quad x \ge -\ln n \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -\ln n \\ \mathbf{P}\left(\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} \left[X_k \le x + \ln n\right]\right) & \text{si} \quad x \ge -\ln n \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -\ln n \\ \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}\left(\left[X_k \le x + \ln n\right]\right) & \text{si} \quad x \ge -\ln n \end{cases} \quad \text{car les variables } X_k \text{ sont ind}^{\text{tes}} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -\ln n \\ \left(\mathbf{P}\left(\left[X_1 \le x + \ln n\right]\right)\right)^n & \text{si} \quad x \ge -\ln n \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -\ln n \\ \left(F_{X_1}\left(x + \ln n\right)\right)^n & \text{si} \quad x \ge -\ln n \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -\ln n \\ \left(1 - \exp\left(-x - \ln n\right)\right)^n & \text{si} \quad x \ge -\ln n \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -\ln n \\ \left(1 - \exp\left(-x - \ln n\right)\right)^n & \text{si} \quad x \ge -\ln n \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -\ln n \\ \left(1 - \dfrac{e^{-x}}{n}\right)^n & \text{si} \quad x \ge -\ln n \end{cases}
\end{aligned}
$$

Etudions alors $\lim_{n \to +\infty} F_{D_n}$, pour x étant fixé dans $\mathbb{R}$. Nous avons pour tout $n \ge 1$, et pour x fixé dans $\mathbb{R}$, $F_{D_n}(x) = \exp\left(n \ln\left(1 - \dfrac{e^{-x}}{n}\right)\right)$ or :

$$n \ln\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} n\left(-\frac{e^{-x}}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -e^{-x}$$

et par continuité de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, pour x fixé dans $\mathbb{R}$:

$$\lim_{n \to +\infty} F_{D_n}(x) = \exp\left(-e^{-x}\right)$$

Cette fonction limite a déjà été étudiée dans l'exercice 5 et ses propriétés sont celles d'une fonction de répartition d'une variable à densité.

Moralité :

$$\boxed{\begin{array}{l} \left(D_n\right)_{n \ge 1} \xrightarrow{\mathcal{L}} T \text{ où } T \text{ est une variable à densité de densité } f_T \text{ définie par :} \\ \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_T(x) = e^{-x} \exp\left(-e^{-x}\right) \quad \textbf{Loi de Gumbel} \end{array}}$$

7 Convergence en probabilité

a $\forall i \in [|1, n|]$, $T_i(\Omega) = \{0, 1\}$ et :

$$\forall i \in [|1, n|], \quad \mathbf{P}\left(\left[T_i = 1\right]\right) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^N$$

Explication : On a $(n-1)$ possibilités de placer chaque boule dans n'importe quelle urne sauf la $i^{\text{ème}}$, et il y a N boules à placer.

Conclusion :

$$\boxed{\forall i \in [|1, n|] \quad T_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\left(\frac{n-1}{n}\right)^N\right)}$$

et d'après le cours :

$$\boxed{\forall i \in [|1,n|]\,,\quad \mathbb{E}(T_i) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^N \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(T_i) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^N \left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^N\right)}$$

b

$$\boxed{\forall (i,j) \in ([|1,n|])^2\,,\quad i \neq j,\quad \mathbb{E}(T_iT_j) = \mathbf{P}([T_iT_j = 1]) = \left(\frac{n-2}{n}\right)^N}$$

Explication : On a $(n-2)$ possibilités de placer chaque boule dans n'importe quelle urne sauf la $i^{\text{ème}}$ et la $j^{\text{ème}}$, et il y a N boules à placer. Alors :

$$\begin{aligned} \forall (i,j) \in ([|1,n|])^2\,,\quad i \neq j,\ Cov(T_iT_j) &= \mathbb{E}(T_iT_j) - \mathbb{E}(T_i)\,\mathbb{E}(T_j) \\ &= \boxed{\left(\frac{n-2}{n}\right)^N - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2N}} \end{aligned}$$

c Par *linéarité de l'espérance* $\forall n \geq 1$, et sachant qu'on a clairement $Y_n = \sum_{k=1}^{n} T_k$ nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_n) &= \mathbb{E}\left(\frac{Y_n}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n}\mathbb{E}(Y_n) \\ &= \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} T_k\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(T_k) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^N \\ &= \frac{n}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^N \\ &= \left(\frac{n-1}{n}\right)^N \\ &= \exp\left(N\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

avec :

$$N\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{N}{n} \underset{+\infty}{\sim} -a$$

et par continuité de la fonction exp sur $\mathbb{R}$,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \exp\left(N\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right) = e^{-a}}$$

d

$$\begin{aligned}
\forall n \geq 1,\ \mathbb{V}(S_n) &= \mathbb{V}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T_k\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\mathbb{V}(T_k) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n}\operatorname{cov}(T_i,T_j)\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\left(n\left(1-\frac{1}{n}\right)^N\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^N\right) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n}\left(\left(\frac{n-2}{n}\right)^N - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2N}\right)\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\left(n\left(1-\frac{1}{n}\right)^{an}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{an}\right) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n}\left(\left(\frac{n-2}{n}\right)^{an} - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2an}\right)\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{an}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{an}\right) + 2C_n^2\left(\left(\frac{n-2}{n}\right)^{an} - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2an}\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{an}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{an}\right) + \left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\left(\frac{n-2}{n}\right)^{an} - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2an}\right)
\end{aligned}$$

Or :

- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{an} = e^{-a}$
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{an}\right) = 1-e^{-a}$
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right) = 1$
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n-2}{n}\right)^{an} = e^{-2a}$
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2an} = e^{-2a}$

Explications :

- $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{an} = \exp\left(an\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)$ et $an\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -a$
- $\frac{n-1}{n} \underset{+\infty}{\sim} 1$
- $\left(\frac{n-2}{n}\right)^{an} = \exp\left(an\ln\left(1-\frac{2}{n}\right)\right)$ et $an\ln\left(1-\frac{2}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -2a$
- $\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2an} = \exp\left(2an\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)$ et $2an\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -2a$

Moralité : Comme :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{an}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{an}\right) &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\left(\frac{n-2}{n}\right)^{an} - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2an}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\mathbb{V}(S_n) = 0}$$

e.i

$$\begin{aligned}
\forall \omega\in\Omega,\ \left|S_n(\omega) - e^{-a}\right| &= \left|S_n(\omega) - \mathbb{E}(S_n) + \mathbb{E}(S_n) - e^{-a}\right| \\
&\leq \boxed{\left|S_n(\omega) - \mathbb{E}(S_n)\right| + \left|\mathbb{E}(S_n) - e^{-a}\right|}
\end{aligned}$$

par l'*inégalité triangulaire*.

e.ii Comme $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(S_n) = -e^{-a}$ alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \quad \forall n \geq n_0, \quad |\mathbb{E}(S_n) - e^{-a}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Donc en supposant que $n \geq n_0$:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \left[|S_n(\omega) - \mathbb{E}(S_n)| < \frac{\varepsilon}{2}\right] \quad \subset \quad [|S_n(\omega) - e^{-a}| < \varepsilon]$$

cela entraine que pour $n \geq n_0$:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall \omega \in \Omega, \quad 0 \leq \mathbf{P}\left(\left[|S_n(\omega) - \mathbb{E}(S_n)| < \frac{\varepsilon}{2}\right]\right) \leq \mathbf{P}([|S_n(\omega) - e^{-a}| < \varepsilon])$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall \omega \in \Omega, \quad 0 \leq 1 - \mathbf{P}\left(\left[|S_n(\omega) - \mathbb{E}(S_n)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right]\right) \leq 1 - \mathbf{P}([|S_n(\omega) - e^{-a}| \geq \varepsilon])$$

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \quad \forall \omega \in \Omega, \quad 0 \leq \mathbf{P}([|S_n(\omega) - e^{-a}| \geq \varepsilon]) \leq \mathbf{P}\left(\left[|S_n(\omega) - \mathbb{E}(S_n)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right]\right)}$$

e.iii Selon le résultat précédent et l'*inégalité de Bienaymé-Tchebychev :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall n \geq n_0, \quad \forall \omega \in \Omega, \quad 0 \leq \mathbf{P}([|S_n(\omega) - e^{-a}| \geq \varepsilon]) \leq \mathbf{P}\left(\left[|S_n(\omega) - \mathbb{E}(S_n)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right]\right) \leq \frac{4\mathbb{V}(S_n)}{\varepsilon^2}$$

et par le *théorème d'encadrement* :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ , \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}([|S_n(\omega) - e^{-a}| \geq \varepsilon]) = 0}$$

e.iv Par définition de la convergence en probabilité :

$$\boxed{(S_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} C \text{ où } C \text{ est la variable certaine égale à } e^{-a}}$$

8 Convergence en probabilité

- Calculons pour commencer $\mathbb{E}(S_n)$.
  Comme S_n s'exprime comme somme de variables de Bernoulli alors S_n admet une espérance (et une variance au passage) égale à :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_n) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(Y_i) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}([X_i X_{i+1} = 1]) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}([X_i = 1])\,\mathbf{P}([X_{i+1} = 1]) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p^2 \\
&= p^2
\end{aligned}$$

- $\mathbb{V}(S_n)$
  Nous avons :

$$\mathbb{V}(S_n) = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(Y_i) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} Cov(Y_i, Y_j)\right)$$

avec :

- Si $j > i+1$, $Cov(Y_i, Y_j) = 0$ car les variables Y_i, Y_j sont clairement indépendantes[1].
- Si $j = i+1$:

$$\begin{aligned} Cov(Y_i, Y_j) &= \mathbb{E}\left(X_i X_{i+1}^2 X_{i+2}\right) - \mathbb{E}(Y_i)\,\mathbb{E}(Y_j) \\ &= \mathbf{P}\left([X_i = 1] \cap [X_{i+1} = 1] \cap [X_{i+2} = 1]\right) - p^4 \\ &= \mathbf{P}([X_i = 1])\,\mathbf{P}([X_{i+1} = 1])\,\mathbf{P}([X_{i+2} = 1]) - p^4 \\ &= p^3 - p^4 \end{aligned}$$

Notez que :

$$\begin{aligned} \forall i \in \mathbb{N}^*,\ \ Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\mathbf{P}([Y_i = 1])\right) &\implies Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\mathbf{P}([X_i X_{i+1} = 1])\right) \\ &\implies Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left((\mathbf{P}([X_i = 1]))^2\right) \\ &\implies Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(p^2\right) \\ &\implies \mathbb{E}(Y_i) = p^2 \text{ et } \mathbb{V}(Y_i) = p^2\left(1 - p^2\right) \end{aligned}$$

Moralité :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(S_n) &= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} p^2\left(1 - p^2\right) + 2 \sum_{1 \le i \le n-1} \left(p^3 - p^4\right)\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\left(np^2\left(1 - p^2\right) + 2(n-1)\left(p^3 - p^4\right)\right) \\ &= \frac{(n - 2p + 3np)(1 - p)\,p^2}{n^2} \end{aligned}$$

Notons que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{V}(S_n) = 0$ du fait que :

$$\frac{(n - 2p + 3np)(1 - p)\,p^2}{n^2} \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{(1 + 3p)(1 - p)\,p^2}{n}$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbf{P}\left([|S_n - \mathbb{E}(S_n)| > \varepsilon]\right) \le \frac{\mathbb{V}(S_n)}{\varepsilon^2} \implies \mathbf{P}\left(\left[\left|S_n - p^2\right| > \varepsilon\right]\right) \le \frac{(n - 2p + 3np)(1 - p)\,p^2}{n^2 \varepsilon^2}$$

Le passage à la limite donnant $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbf{P}\left(\left[\left|S_n - p^2\right| > \varepsilon\right]\right) = 0$ ce qui équivaut à dire que :

$$\boxed{(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \xrightarrow{\mathbf{P}} p^2}$$

9 Convergence en probabilité

a Comme $\overline{S_n}$ s'exprime comme somme de variables finies alors S_n admet une espérance (et une variance au passage) égale à

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\overline{S_n}\right) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(1 - 2p^i\right) \\ &= \boxed{1 - \frac{2}{n} p \frac{1 - p^n}{1 - p}} \end{aligned}$$

et :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}\left(\overline{S_n}\right) = 1}$$

[1] Il n'y a pas de "chevauchement" des indices !

b C'est typiquement le type de question nécessitant l'emploi de l'IBT. Il ne manque donc la variance de $\overline{S_n}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\left(\overline{S_n}\right) &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}(X_i) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbb{E}\left(X_i^2\right)-\left(\mathbb{E}(X_i)\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left(1-\left(1-2p^i\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left(4p^i-4p^{2i}\right) \\
&= \frac{4}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}p^i-\sum_{i=1}^{n}\left(p^2\right)^i\right) \\
&= \frac{4}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}p^i-\sum_{i=1}^{n}\left(p^2\right)^i\right) \\
&= \frac{4}{n^2}\left(p\frac{1-p^n}{1-p}-p^2\frac{1-p^{2n}}{1-p^2}\right)
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
\frac{4}{\varepsilon^2}\mathbb{V}\left(\overline{S_n}\right) &= \frac{4}{n^2\varepsilon^2}\left(p\frac{1-p^n}{1-p}-p^2\frac{1-p^{2n}}{1-p^2}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

C'est là que l'exercice 7 va nous sauver !

$$\begin{aligned}
\forall\omega\in\Omega,\ \left|\overline{S_n}(\omega)-1\right| &= \left|\overline{S_n}(\omega)-\mathbb{E}\left(\overline{S_n}\right)+\mathbb{E}\left(\overline{S_n}\right)-1\right| \\
&\leq \left|\overline{S_n}(\omega)-\mathbb{E}\left(\overline{S_n}\right)\right|+\left|\mathbb{E}\left(\overline{S_n}\right)-1\right|
\end{aligned}$$

par l'*inégalité triangulaire.*
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{E}\left(\overline{S_n}\right)=1$ alors :

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists n_0\in\mathbb{N}\mid\quad \forall n\geq n_0,\quad \left|\mathbb{E}\left(\overline{S_n}\right)-1\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

Donc en supposant que $n\geq n_0$:

$$\forall\varepsilon>0,\quad \left[\left|\overline{S_n}-\mathbb{E}\left(\overline{S_n}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{2}\right]\quad\subset\quad\left[\left|\overline{S_n}-1\right|<\varepsilon\right]$$

cela entraine que pour $n\geq n_0$:

$$\begin{aligned}
\forall\varepsilon>0,\ 0 &\leq \mathbf{P}\left(\left[\left|\overline{S_n}-\mathbb{E}\left(\overline{S_n}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{2}\right]\right)\leq\mathbf{P}\left(\left[\left|\overline{S_n}-1\right|<\varepsilon\right]\right) \\
0 &\leq 1-\mathbf{P}\left(\left[\left|\overline{S_n}-\mathbb{E}\left(\overline{S_n}\right)\right|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right]\right)\leq 1-\mathbf{P}\left(\left[\left|\overline{S_n}-1\right|\geq\varepsilon\right]\right) \\
0 &\leq \mathbf{P}\left(\left[\left|\overline{S_n}-1\right|\geq\varepsilon\right]\right)\leq\mathbf{P}\left(\left[\left|\overline{S_n}-\mathbb{E}\left(\overline{S_n}\right)\right|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right]\right)
\end{aligned}$$

et selon l'*inégalité de Bienaymé-Tchebychev :*

$$\forall\varepsilon>0\quad\forall n\geq n_0,\quad 0\leq\mathbf{P}\left(\left[\left|\overline{S_n}-1\right|\geq\varepsilon\right]\right)\leq\mathbf{P}\left(\left[\left|\overline{S_n}-\mathbb{E}\left(\overline{S_n}\right)\right|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right]\right)\leq\frac{4\mathbb{V}\left(\overline{S_n}\right)}{\varepsilon^2}$$

et par le *théorème d'encadrement :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}\left(\left[\left|\overline{S_n} - 1\right| \geq \varepsilon\right]\right) = 0$$

Par définition de la convergence en probabilité :

$$\boxed{\left(\overline{S_n}\right) \xrightarrow{\mathbf{P}} C \text{ où } C \text{ est la variable certaine égale à } 1}$$

10 Une autre forme de la loi faible des grands nombres

C'est comme d'habitude en notant :

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left(X_j\right)$$

et :

$$\begin{aligned} \forall \omega \in \Omega, \quad \left|\overline{X_n}(\omega) - m\right| &= \left|\overline{X_n}(\omega) - \mathbb{E}\left(\overline{X_n}\right) + \mathbb{E}\left(\overline{X_n}\right) - m\right| \\ &\leq \left|\overline{X_n}(\omega) - \mathbb{E}\left(\overline{X_n}\right)\right| + \left|\mathbb{E}\left(\overline{X_n}\right) - m\right| \end{aligned}$$

par l'*inégalité triangulaire.*
Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}\left(\overline{X_n}\right) = m$ alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, | \quad \forall n \geq n_0, \quad \left|\mathbb{E}\left(\overline{X_n}\right) - m\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Donc en supposant que $n \geq n_0$:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \left[\left|\overline{X_n} - \mathbb{E}\left(\overline{X_n}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}\right] \quad \subset \quad \left[\left|\overline{X_n} - m\right| < \varepsilon\right]$$

cela entraine que pour $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \ 0 &\leq \mathbf{P}\left(\left[\left|\overline{X_n} - \mathbb{E}\left(\overline{X_n}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}\right]\right) \leq \mathbf{P}\left(\left[\left|\overline{X_n} - m\right| < \varepsilon\right]\right) \\ 0 &\leq 1 - \mathbf{P}\left(\left[\left|\overline{X_n} - \mathbb{E}\left(\overline{X_n}\right)\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right]\right) \leq 1 - \mathbf{P}\left(\left[\left|\overline{X_n} - m\right| \geq \varepsilon\right]\right) \\ 0 &\leq \mathbf{P}\left(\left[\left|\overline{X_n} - m\right| \geq \varepsilon\right]\right) \leq \mathbf{P}\left(\left[\left|\overline{X_n} - \mathbb{E}\left(\overline{X_n}\right)\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right]\right) \end{aligned}$$

et selon l'*inégalité de Bienaymé-Tchebychev* :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \geq n_0 \quad 0 \leq \mathbf{P}\left(\left[\left|\overline{X_n} - m\right| \geq \varepsilon\right]\right) \leq \mathbf{P}\left(\left[\left|\overline{X_n} - \mathbb{E}\left(\overline{X_n}\right)\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right]\right) \leq \frac{4\mathbb{V}\left(\overline{X_n}\right)}{\varepsilon^2}$$

et par le *théorème d'encadrement :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}\left(\left[\left|\overline{X_n} - m\right| \geq \varepsilon\right]\right) = 0$$

Par définition de la convergence en probabilité :

$$\boxed{\left(\overline{X_n}\right) \xrightarrow{\mathbf{P}} C \text{ où } C \text{ est la variable certaine égale à } m}$$

11 Convergence en probabilité d'une suite de variables suivant une loi bêta

a On vérifie aisément que :

- $f \geq 0$.

- $f \geq 0$ sur $\mathbb{R}$.
- f est continue sur $\mathbb{R}$sauf éventuellement en 0 (cela dépend des valeurs de n, m).
- $\int_{\mathbb{R}} f$ converge et vaut 1 par la définition de f et de $B(n,m)$.

b Calculons d'abord la valeur de $B(n,m)$. Par une intégration par parties (les fonctions u et v en jeu étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$) :

$$\begin{aligned}\forall (n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}_2,\ B(n,m) &= \int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{m-1}\,dx \\ &= \left[\frac{x^n}{n}(1-x)^{m-1}\right]_0^1 + \frac{m-1}{n}\int_0^1 x^n (1-x)^{m-2}\,dx \\ &= \frac{m-1}{n} B(n+1, m-1)\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}B(n,m) &= \frac{m-1}{n} B(n+1,m-1) \\ &= \frac{(m-1)(m-2)}{n(n+1)} B(n+2,m-2) \\ &= \cdots \\ &= \frac{(m-1)!}{n(n+1)\cdots(n+m-2)} B(n+m,1)\end{aligned}$$

avec :

$$B(n+m,1) = \int_0^1 x^{n+m-2}dx = \frac{1}{n+m-1}$$

et finalement :

$$B(n,m) = \frac{(n-1)!\,(m-1)!}{(n+m-1)!}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{n,m}) &= \frac{1}{B(n,m)}\int_0^1 x^n(1-x)^{m-1}\,dx \\ &= \frac{B(n+1,m)}{B(n,m)} \\ &= \boxed{\frac{n}{n+m}}\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(X_{n,m}^2\right) &= \frac{1}{B(n,m)}\int_0^1 x^{n+1}(1-x)^{m-1}\,dx \\ &= \frac{B(n+2,m)}{B(n,m)} \\ &= \frac{n(n+1)}{(n+m)(n+m+1)}\end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X_{n,m}) &= \mathbb{E}\left(X_{n,m}^2\right) - \left(\mathbb{E}(X_{n,m})\right)^2 \\ &= \boxed{\frac{nm}{(n+m)^2(n+m+1)}}\end{aligned}$$

C Je vous laisse reprendre, seuls, pour la cinquième fois le raisonnement de l'exercice 7 (c'est du "copier-coller") montrant que :

$$\boxed{(X_{n,m}) \xrightarrow{\mathbf{P}} C \text{ où } C \text{ est la variable certaine égale à } 0}$$

12 Variables presque sûrement égales

Nous avons :

$$\begin{cases} (X_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow{\mathbf{P}} Y \\ (X_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow{\mathbf{P}} Z \end{cases} \implies \begin{cases} \forall\varepsilon>0, & \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(|X_n-Y| \geq \dfrac{\varepsilon}{2}\right)=0 \\ \forall\varepsilon>0, & \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(|X_n-Z| \geq \dfrac{\varepsilon}{2}\right)=0 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} \forall\varepsilon>0, & \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(|X_n-Y| < \dfrac{\varepsilon}{2}\right)=1 \\ \forall\varepsilon>0, & \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(|X_n-Z| < \dfrac{\varepsilon}{2}\right)=1 \end{cases}$$

Or comme selon l'*inégalité triangulaire* :

$$\begin{aligned} |Y-Z| &= |Y-X_n+X_n-Z| \\ &\leq |Y-X_n|+|X_n-Z| \end{aligned}$$

il existe un rang n à partir duquel :

$$\begin{aligned} &\forall\varepsilon>0, \quad \left(\left[|X_n-Y|<\frac{\varepsilon}{2}\right] \bigcap \left[|X_n-Z|<\frac{\varepsilon}{2}\right]\right) \subset [|Y-Z|<\varepsilon] \\ &\text{donc } [|Y-Z|\geq\varepsilon] \subset \left(\left[|X_n-Y|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right] \bigcup \left[|X_n-Z|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right]\right) \\ &\text{et } \mathbf{P}([|Y-Z|\geq\varepsilon]) \leq \mathbf{P}\left(\left[|X_n-Y|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right]\right) + \mathbf{P}\left(\left[|X_n-Z|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right]\right) \text{ (Boole)} \end{aligned}$$

Par passage à la limite quand n tend vers l'infini :

$$\forall\varepsilon>0, \quad \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}([|Y-Z|\geq\varepsilon])=0$$

soit :

$$\forall\varepsilon>0, \quad \mathbf{P}([|Y-Z|\geq\varepsilon])=0$$

et donc en prenant ε aussi petit que l'on veut il y a une probabilité infiniment petite que les valeurs de Y et de Z diffèrent, donc :

$$\boxed{Y=Z \quad \text{presque sûrement}}$$

13 Analyse et probabilités : le théorème de la limite centrée

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, introduisons $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables indépendantes et de même loi de Poisson de paramètre 1. Alors d'après le cours :

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} X_k \hookrightarrow \mathcal{P}(n)$$

Le *théorème de la limite centrée* nous donne :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\left[\frac{S_n-n}{\sqrt{n}}\leq 0\right]\right) &= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}\left[\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leq 0\right] &= [S_n \leq n] \\ &= \biguplus_{k=0}^{n} [S_n = k]\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\left[\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leq 0\right]\right) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}\left([S_n = k]\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} e^{-n}\frac{n^k}{k!}\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}}$$

14 Analyse et probabilités : le théorème de la limite centrée

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, introduisons $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables indépendantes et de même loi binomiale de paramètres 1 et 1/3. Alors d'après le cours $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$. Le *théorème de la limite centrée* nous donne :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\left[\frac{S_n - \frac{n}{3}}{\frac{\sqrt{2n}}{3}} \leq 0\right]\right) &= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}\left[\frac{S_n - \frac{n}{3}}{\frac{\sqrt{2n}}{3}} \leq 0\right] &= \left[S_n \leq \frac{n}{3}\right] \\ &= \biguplus_{k=0}^{\left[\frac{n}{3}\right]} [S_n = k]\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\left[\frac{S_n - \dfrac{n}{3}}{\dfrac{\sqrt{2n}}{3}} \leq 0\right]\right) &= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{3}\right]} \mathbf{P}\left([S_n = k]\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{3}\right]} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{3}\right]} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-n+n} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{3}\right]} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{n} \left(\frac{2 \times 3}{3}\right)^{n-k} \\
&= \frac{1}{3^n} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{3}\right]} \binom{n}{k} 2^{n-k}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{3^n} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{3}\right]} \binom{n}{k} 2^{n-k} = \frac{1}{2}}$$