

# Correction des exercices de la fiche 9

## 1 Estimation ponctuelle et risque quadratique

**a** Nous avons par définition  $T_n = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n X_k$  et comme les variables  $X_k$  admettent chacune une espérance et une variance,  $T_n$  admet à son tour une espérance et une variance. Nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T_n) &= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) \\ &= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{a}{2} \\ &= a \end{aligned}$$

Ainsi  $B(T_n, a) = 0$  et  $T_n$  est un estimateur sans biais

Comme  $T_n$  est un estimateur sans biais, son risque quadratique est égal à sa variance soit :

$$\begin{aligned} EQ(T_n, a) &= r_{T_n}(a) \\ &= \mathbb{V}(T_n) \\ &= 4\mathbb{V}(\bar{X}_n) \\ &= \frac{4}{n^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k) \\ &= \frac{4}{n^2} \sum_{k=1}^n \frac{a^2}{12} \\ &= \boxed{\frac{a^2}{3n}} \end{aligned}$$

**b** On sait qu'en notant respectivement  $F_{T'_n}$  et  $F_X$  les fonctions de répartition de  $T'_n$  et de  $X$  nous avons clairement  $F_{T'_n} = F_X^n$  (cf. les exercices de la fiche 7 et le poly de cours du chapitre 10) qui donne :

$$F_{T'_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \left(\frac{x}{a}\right)^n & \text{si } x \in [0, a] \\ 1 & \text{si } x > a \end{cases}$$

Nous voyons à ce niveau que :

- $\lim_{-\infty} F_{T'_n} = 0$ ,
- $\lim_{+\infty} F_{T'_n} = 1$ ,
- $F_{T'_n}$  est continue sur  $]-\infty, 0[$  (fonction nulle)
- $F_{T'_n}$  est continue sur  $]0, a[$  (fonction constante égale à 1)
- $F_{T'_n}$  est continue sur  $[0, a]$  (monôme)
- $\lim_{0^-} F_{T'_n} = 0 = \lim_{0^+} F_{T'_n} = F_{T'_n}(0)$ ,
- $\lim_{a^-} F_{T'_n} = 0 = \lim_{a^+} F_{T'_n} = F_{T'_n}(a)$   
donc  $F_{T'_n}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

- D'autre part  $F_{T'_n}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  sauf peut être en 0 et  $a$  avec sur  $]0, a[$  :

$$F'_{T'_n}(x) = \frac{n}{a} \left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} \geq 0$$

Tout ceci fait que  $F_{T'_n}$  possède toutes les propriétés requises pour affirmer que  $T'_n$  est une variable à densité dont une densité  $f_{T'_n}$  est obtenue par dérivation de  $F_{T'_n}$  là où c'est possible ce qui donne par exemple :

$$f_{T'_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in ]-\infty, 0[ \cup ]a, +\infty[ \\ \frac{nx^{n-1}}{a^n} & \text{si } x \in [0, a] \end{cases}$$

- $T'_n$  admet une espérance si et seulement si  $\int_0^a \frac{nx^n}{a^n} dx$  est convergente du fait que  $f_{T'_n}$  coïncide avec la fonction nulle en dehors de  $[0, a]$ . En cas de convergence  $\mathbb{E}(T'_n) = \int_0^a \frac{nx^n}{a^n} dx$ . La convergence ne pose aucun problème (intégration d'un monôme sur un segment) et donc l'espérance existe et est égale à :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T'_n) &= \left[ \frac{nx^{n+1}}{(n+1)a^n} \right]_0^a \\ &= \frac{na}{n+1} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} B(T'_n, a) &= \mathbb{E}(T'_n - a) \\ &= \mathbb{E}(T'_n) - \mathbb{E}(a) \\ &= \frac{na}{n+1} - a \\ &= \boxed{-\frac{a}{n+1}} \end{aligned}$$

- $T'_n$  admet une variance si et seulement si  $T'_n$  admet un moment d'ordre deux soit donc si et seulement si  $\int_0^a \frac{nx^{n+1}}{a^n} dx$  est convergente du fait que  $f_{T'_n}$  coïncide avec la fonction nulle en dehors de  $[0, a]$ . En cas de convergence  $\mathbb{E}(T_n'^2) = \int_0^a \frac{nx^{n+1}}{a^n} dx$ . La convergence ne pose aucun problème (intégration d'un monôme sur un segment) et donc le moment d'ordre deux de  $T'_n$  existe et vaut :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T_n'^2) &= \left[ \frac{nx^{n+2}}{(n+2)a^n} \right]_0^a \\ &= \frac{na^2}{n+2} \end{aligned}$$

**Conclusion :**  $T'_n$  admet une variance donnée par le théorème de Huygens-Koenig égale à :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(T'_n) &= \mathbb{E}(T_n'^2) - (\mathbb{E}(T'_n))^2 \\ &= \frac{na^2}{n+2} - \left(\frac{na}{n+1}\right)^2 \\ &= \frac{na^2}{(n+1)^2(n+2)} \end{aligned}$$

Dans ce cas l'erreur quadratique de  $T'_n$  par rapport à  $a$  vaut :

$$\begin{aligned} EQ(T'_n, a) &= \mathbb{V}(T'_n) + (B(T'_n, a))^2 \\ &= \frac{na^2}{(n+1)^2(n+2)} + \left(-\frac{a}{n+1}\right)^2 \\ &= \boxed{\frac{2a^2}{(n+1)(n+2)}} \\ &\simeq \frac{2a^2}{n^2} \end{aligned}$$

**c** Comme la variable  $T'_n$  admet une espérance et une variance,  $T''_n$  admet à son tour une espérance et une variance. Nous avons donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T''_n) &= \frac{n+1}{n} \mathbb{E}(T'_n) \\ &= \frac{n+1}{n} \times \frac{na}{n+1} \\ &= a \end{aligned}$$

Donc  $B(T''_n, a) = 0$  ce qui fait que  $T''_n$  est un estimateur sans biais de  $a$

Comme  $T''_n$  est un estimateur sans biais, son risque quadratique est égal à sa variance soit :

$$\begin{aligned} EQ(T''_n, a) &= r_{T''_n}(a) \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \mathbb{V}(T'_n) \\ &= \frac{na^2}{(n+1)^2(n+2)} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \\ &= \boxed{\frac{a^2}{n(n+2)}} \\ &\simeq \frac{a^2}{n^2} \end{aligned}$$

**d**

Pour de grandes valeurs de  $n$ ,  $T''_n$  est le meilleur estimateur de  $a$

## 2 Estimation ponctuelle

**a** Par théorème, nous avons :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n\lambda)$$

Nous avons :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{E}(S_n) = \mathbb{V}(S_n) = n\lambda$$

donc  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\overline{X}_n) &= \frac{1}{n} \mathbb{E}(S_n) \\ &= \frac{1}{n} n\lambda \\ &= \lambda \end{aligned} \tag{1}$$

et :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(\overline{X}_n) &= \frac{1}{n^2} \mathbb{V}(S_n) \\ &= \frac{1}{n^2} n\lambda \\ &= \frac{\lambda}{n}\end{aligned}$$

ce qui entraîne que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{V}(\overline{X}_n) = 0 \quad (2)$$

Selon (1) et (2) nous obtenons une condition suffisante pour dire que :

$\overline{X}_n$  est un estimateur sans biais et convergent

**b.i** Par le *théorème de transfert* :

$$\begin{aligned}T_n \text{ admet une espérance} &\iff \sum_k e^{-\frac{k}{n}} \mathbf{P}([S_n = k]), \quad k \geq 0 \text{ est cvte} \\ &\iff \sum_k e^{-\frac{k}{n}} \frac{e^{-n\lambda} (n\lambda)^k}{k!}, \quad k \geq 0 \text{ est cvte} \\ &\iff e^{-n\lambda} \sum_k \frac{(n\lambda e^{-\frac{1}{n}})^k}{k!}, \quad k \geq 0 \text{ est cvte}\end{aligned}$$

A ce niveau nous constatons que nous sommes en présence d'une *série convergente en tant que série exponentielle* avec  $n\lambda e^{-\frac{1}{n}} \in \mathbb{R}$ . Dans ce cas  $\mathbb{E}(T_n)$  existe et est égale à :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T_n) &= e^{-n\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(n\lambda e^{-\frac{1}{n}})^k}{k!} \\ &= e^{-n\lambda} \exp\left(n\lambda e^{-\frac{1}{n}}\right) \\ &= \exp\left(n\lambda \left(e^{-\frac{1}{n}} - 1\right)\right)\end{aligned}$$

Comme  $\mathbb{E}(T_n) \neq e^{-\lambda}$  mais que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(T_n) = e^{-\lambda}$  du fait que :

$$e^{-\frac{1}{n}} - 1 \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{n} \implies n\lambda \left(e^{-\frac{1}{n}} - 1\right) \underset{+\infty}{\sim} -\lambda$$

et de la continuité de la fonction  $\exp$ , nous pouvons conclure que :

$T_n$  n'est pas un estimateur sans biais certes, mais **un estimateur asymptotiquement sans biais**

**b.ii** Les valeurs de  $X_1$  lorsque l'événement  $[S_n = s]$  est réalisé appartiennent à l'ensemble  $[[0, s]]$ .  
Et :

$$\begin{aligned}
 \forall k \in [0, s], \mathbf{P}_{[S_n=s]}([X_1 = k]) &= \frac{\mathbf{P}([X_1 = k] \cap [S_n = s])}{\mathbf{P}([S_n = s])} \\
 &= \frac{\mathbf{P}([X_1 = k] \cap [X_1 + \dots + X_n = s])}{\mathbf{P}([S_n = s])} \\
 &= \frac{\mathbf{P}([X_1 = k] \cap [X_2 + \dots + X_n = s - k])}{\mathbf{P}([S_n = s])} \\
 &= \frac{\mathbf{P}([X_1 = k]) \mathbf{P}([X_2 + \dots + X_n = s - k])}{\mathbf{P}([S_n = s])} \text{ par ind}^{\text{es}} \text{ des } X_k \\
 &= \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \times \frac{e^{-(n-1)\lambda} ((n-1)\lambda)^{s-k}}{(s-k)!} \times \frac{s!}{e^{-n\lambda} (n\lambda)^s} \\
 &= \frac{s!}{k! (s-k)!} \times \frac{\lambda^k ((n-1)\lambda)^{s-k}}{(n\lambda)^s} \\
 &= \binom{s}{k} \left(\frac{\lambda}{n\lambda}\right)^k \left(\frac{(n-1)\lambda}{n\lambda}\right)^{s-k} \\
 &= \binom{s}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(\frac{n-1}{n}\right)^{s-k} \tag{3}
 \end{aligned}$$

en notant que :

$$X_2 + \dots + X_n \hookrightarrow \mathcal{P}((n-1)\lambda)$$

**Conclusion :** selon (3) la loi conditionnelle de  $X_1$  sachant que  $[S_n = s]$  est la loi  $\mathcal{B}\left(s, \frac{1}{n}\right)$ .

En particulier :

$$\mathbf{P}_{[S_n=s]}([X_1 = 0]) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^s$$

2.c

Calculons pour commencer, en cas d'existence,  $\mathbb{E}(\hat{\theta})$ . Par le *théorème de transfert* :

$$\begin{aligned}
 \hat{\theta} \text{ admet une espérance} &\iff \sum_k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \mathbf{P}([S_n = k]), \quad k \geq 0 \text{ est cvte} \\
 &\iff \sum_k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \frac{e^{-n\lambda} (n\lambda)^k}{k!}, \quad k \geq 0 \text{ est cvte} \\
 &\iff e^{-n\lambda} \sum_k \frac{\left(n\lambda \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)^k}{k!}, \quad k \geq 0 \text{ est cvte}
 \end{aligned}$$

A ce niveau nous constatons que nous sommes en présence d'une *série convergente en tant que série exponentielle* avec  $n\lambda \left(1 - \frac{1}{n}\right) \in \mathbb{R}$ . Dans ce cas  $\mathbb{E}(\hat{\theta})$  existe et est égale à :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(\hat{\theta}) &= e^{-n\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(n\lambda \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)^k}{k!} \\
 &= e^{-n\lambda} \exp(n\lambda - \lambda) \\
 &= \exp(n\lambda - n\lambda - \lambda) \\
 &= e^{-\lambda} \\
 &= \theta \tag{4}
 \end{aligned}$$

Ainsi selon (4),

$$\hat{\theta} \text{ est un estimateur sans biais}$$

**2.d** Tout d'abord  $\hat{\theta}$  admet une variance si et seulement si  $\hat{\theta}^2$  admet une espérance et par le *théorème de transfert* :

$$\begin{aligned} \hat{\theta}^2 \text{ admet une espérance} &\iff \sum_k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2k} \mathbf{P}([S_n = k]), \quad k \geq 0 \text{ est cvte} \\ &\iff \sum_k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2k} \frac{e^{-n\lambda} (n\lambda)^k}{k!}, \quad k \geq 0 \text{ est cvte} \\ &\iff e^{-n\lambda} \sum_k \frac{\left(n\lambda \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2\right)^k}{k!}, \quad k \geq 0 \text{ est cvte} \end{aligned}$$

A ce niveau nous constatons que nous sommes en présence d'une *série convergente en tant que série exponentielle* avec  $n\lambda \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 \in \mathbb{R}$ . Dans ce cas  $\mathbb{E}(\hat{\theta}^2)$  existe et est égale à :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\hat{\theta}^2) &= e^{-n\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(n\lambda \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2\right)^k}{k!} \\ &= e^{-n\lambda} \exp\left(n\lambda \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2\right) \\ &= \exp\left(n\lambda \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 - 1\right)\right) \\ &= \exp\left(\frac{\lambda}{n} - 2\lambda\right) \end{aligned}$$

**Conclusion :**  $\hat{\theta}$  admet une variance égale, par le *théorème de Huygens-Koenig*, à :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(\hat{\theta}) &= \mathbb{E}(\hat{\theta}^2) - \left(\mathbb{E}(\hat{\theta})\right)^2 \\ &= \exp\left(\frac{\lambda}{n} - 2\lambda\right) - (e^{-\lambda})^2 \\ &= \exp\left(\frac{\lambda}{n} - 2\lambda\right) - e^{-2\lambda} \\ &= e^{-2\lambda} \left(e^{\frac{\lambda}{n}} - 1\right) \end{aligned}$$

Comme :

$$\begin{aligned} e^{\frac{\lambda}{n}} - 1 &\underset{+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n} \\ \implies e^{-2\lambda} \left(e^{\frac{\lambda}{n}} - 1\right) &\underset{+\infty}{\sim} \frac{\lambda e^{-2\lambda}}{n} \\ \implies \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{V}(\hat{\theta}) = 0} & \quad (5) \end{aligned}$$

**Nota bene :** selon (5) :

$$\boxed{\hat{\theta} \text{ est un estimateur convergent}}$$

### 3 Estimation ponctuelle et par intervalle

1

Tout d'abord  $X(\Omega) = [0, 1]$ .

Soit  $F_X$  la fonction de répartition de  $X$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \mathbf{P}([X \leq x])$$

- Si  $x < 0$  :  $F_X(x) = 0$ .
- Si  $x > 1$  :  $F_X(x) = 1$ .
- Si  $x \in [0, 1]$  en introduisant le système complet d'événements  $\{[X \leq a], [X > a]\}$  de probabilités non nulles, la *formule des probabilités totales* permet de dire que :

$$F_X(x) = \mathbf{P}_{[X \leq a]}([X \leq x]) \mathbf{P}([X \leq a]) + \mathbf{P}_{[X > a]}([X \leq x]) \mathbf{P}([X > a])$$

– si  $x \in [0, a]$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \left(\frac{x-0}{a}\right) \frac{1}{2} + 0 \\ &= \frac{x}{2a} \end{aligned}$$

– si  $x \in [a, 1]$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= 1 \times \frac{1}{2} + \left(\frac{x-a}{1-a}\right) \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{x-a}{1-a}\right)\right) \end{aligned}$$

Par dérivation de  $F_X$  sur  $\mathbb{R}^* - \{a, 1\}$ , nous obtenons  $f_X$  une densité de  $X$  et en posant :

$$\begin{aligned} f_X(0) &= f_X(a) \\ &= f_X(1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elle définie par :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & \text{si } x \in ]0, a[ \\ \frac{1}{2(1-a)} & \text{si } x \in ]a, 1[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- L'existence de l'espérance ne pose aucun problème vu que  $f_X$  est nulle au voisinage de l'infini et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_0^a \frac{x}{2a} dx + \int_a^1 \frac{x}{2(1-a)} dx \\ &= \left[\frac{x^2}{4a}\right]_0^a + \left[\frac{x^2}{4(1-a)}\right]_a^1 \\ &= \frac{1}{4}a - \frac{1}{4(a-1)} + \frac{a^2}{4(a-1)} \\ &= \frac{2a+1}{4} \end{aligned}$$

- Pour les mêmes raisons qu'auparavant l'existence de la variance ne pose aucun problème vu que  $f_X$  est nulle au voisinage de l'infini et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \text{ par Huygens-koenig} \\
&= \left( \int_0^a \frac{x^2}{2a} dx + \int_a^1 \frac{x^2}{2(1-a)} dx \right) - \left( \frac{2a+1}{4} \right)^2 \\
&= \frac{1}{6} (a + 2a^2 + 1) - \left( \frac{2a+1}{4} \right)^2 \\
&= \boxed{\frac{1}{48} (4a^2 - 4a + 5)}
\end{aligned}$$

**b** Par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}
M_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \\
\Rightarrow \mathbb{E}(M_n) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) \\
\Rightarrow \mathbb{E}(M_n) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( \frac{2a+1}{4} \right) \\
\Rightarrow \boxed{\mathbb{E}(M_n) = \frac{2a+1}{4}} & \tag{6}
\end{aligned}$$

Par indépendance des variables  $X_k$  :

$$\begin{aligned}
M_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \\
\Rightarrow \mathbb{V}(M_n) &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k) \\
\Rightarrow \mathbb{V}(M_n) &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{48} (4a^2 - 4a + 5) \\
\Rightarrow \boxed{\mathbb{V}(M_n) = \frac{1}{48n} (4a^2 - 4a + 5)}
\end{aligned}$$

Selon (6) il suffit de poser :

$$\boxed{T_n = 2M_n - \frac{1}{2}}$$

pour avoir un estimateur sans biais de  $a$ , car :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T_n) &= 2\mathbb{E}(M_n) - \frac{1}{2} \\
&= 2 \left( \frac{2a+1}{4} \right) - \frac{1}{2} \\
&= a
\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\forall n \geq 1, \mathbb{V}(T_n) &= 4\mathbb{V}(M_n) \\
&= \frac{4}{48n} (4a^2 - 4a + 5) \\
&= \frac{1}{12n} (4a^2 - 4a + 5)
\end{aligned}$$

Comme il est évident que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{V}(T_n) = 0$$

**Conclusion :**

la suite d'estimateur sans  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente

**3** Remarquons que :

$$4a^2 - 4a + 5 = 4 + (2a - 1)^2$$

donc :

$$\begin{aligned} & \forall a \in ]0, 1[, \quad 2a - 1 < 1 \\ \Rightarrow & 4 + (2a - 1)^2 < 5 \\ \Rightarrow & \boxed{\mathbb{V}(T_n) \leq \frac{5}{12n}} \end{aligned}$$

Rappelons l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\begin{aligned} & \forall \varepsilon > 0, \quad \mathbf{P}(|T_n - \mathbb{E}(T_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(T_n)}{\varepsilon^2} \\ \Rightarrow & \mathbf{P}(|T_n - a| \geq \varepsilon) \leq \frac{4(4a^2 - 4a + 5)}{48n\varepsilon^2} \\ \Rightarrow & \mathbf{P}(|T_n - a| \geq \varepsilon) \leq \frac{5}{12n\varepsilon^2} \\ \Rightarrow & 1 - \mathbf{P}(|T_n - a| < \varepsilon) \leq \frac{5}{12n\varepsilon^2} \\ \Rightarrow & \mathbf{P}(|T_n - a| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{5}{12n\varepsilon^2} \end{aligned}$$

Pour vérifier l'inégalité :

$$\mathbf{P}(|T_n - a| < \varepsilon) \geq 1 - \alpha$$

il suffit de choisir  $\varepsilon$  tel que :

$$1 - \frac{5}{12n\varepsilon^2} \geq 1 - \alpha$$

soit  $\varepsilon$  tel que :

$$\frac{5}{12n\varepsilon^2} \leq \alpha \Rightarrow \boxed{\varepsilon \geq \sqrt{\frac{5}{12n\alpha}}}$$

**d** Le théorème de la limite centrée nous permet de dire que :

$$\left( \frac{T_n - a}{\sqrt{\mathbb{V}(T_n)}} \right)_{n \geq 1} \xrightarrow{\mathcal{L}} N \text{ où } N \leftrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

Nous avons :

$$\mathbf{P} \left( \left[ -1,96 \leq \frac{T_n - a}{\sqrt{\mathbb{V}(T_n)}} \leq 1,96 \right] \right) = 0,95$$

ou :

$$\mathbf{P}([T_n - 1,96 \times \sigma(T_n) \leq a \leq T_n + 1,96 \times \sigma(T_n)]) = 0,95$$

Mais attention, l'intervalle  $[ T_n - 1,96 \times \sigma(T_n) ; T_n + 1,96 \times \sigma(T_n) ]$  n'est pas observable car  $\sigma(T_n)$  dépend de  $a$ . En revanche comme  $\mathbb{V}(T_n) \leq \frac{5}{12n}$ , nous avons :

$$\left[ T_n - 1,96 \times \sigma(T_n) \ ; \ T_n + 1,96 \times \sigma(T_n) \right] \subset \left[ T_n - 1,96\sqrt{\frac{5}{12n}} \ ; \ T_n + 1,96\sqrt{\frac{5}{12n}} \right]$$

ce dernier étant observable. Donc :

$$\mathbf{P} \left( \left[ T_n - 1,96\sqrt{\frac{5}{12n}} \ ; \ T_n + 1,96\sqrt{\frac{5}{12n}} \right] \right) \geq 0.95$$

c'est à dire que l'intervalle de confiance obtenu, est observable avec un risque inférieur à  $\alpha = 5\%$ .

**e** L'inégalité de la troisième question :

$$\mathbf{P} (|T_n - a| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{5}{12n\varepsilon^2}$$

s'écrit de manière équivalente :

$$\mathbf{P} (T_n - \varepsilon < a < T_n + \varepsilon) \geq 1 - \frac{5}{12n\varepsilon^2}$$

La longueur de l'intervalle est égale à  $2\varepsilon$  qui est supérieure ou égale à  $2\sqrt{\frac{5}{12n\alpha}}$  et celle de l'intervalle de la quatrième question est  $2 \times 1.96\sqrt{\frac{5}{12n}}$ . Le rapport de celles-ci est supérieur ou égal à :

$$\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{12n\alpha}} \times \frac{\sqrt{12n}}{2 \times 1.96\sqrt{5}} = \frac{1}{1.96\sqrt{\alpha}}$$

soit donc supérieur ou égal à :

$$\frac{1}{1.96\sqrt{0.05}} = \boxed{2.28}$$

## 4 Estimation ponctuelle

**a.i** La variable  $S_n$  est à valeurs dans  $[a, b]$ . Si  $x \in [a, b]$  alors :

$$[S_n \leq x] = [X_1 \leq x] \cap [X_2 \leq x] \cap \dots \cap [X_n \leq x]$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} F_{S_n}(x) &= \mathbf{P}([S_n \leq x]) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n & \text{si } x \in [a, b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases} \end{aligned}$$

Je vous laisse voir rapidement que les propriétés de  $F_{S_n}$  nous permettant de dire que  $S_n$  reste une variable à densité de densité associée  $f_{S_n}$  telle que :

$$f_{S_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ n \frac{(x-a)^{n-1}}{(b-a)^n} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{si } x > b \end{cases}$$

Comme  $S_n$  est à support fini elle admet une espérance égale à :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(S_n) &= \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt \\
 &= \int_a^b n \frac{x(x-a)^{n-1}}{(b-a)^n} dx \\
 &= \int_a^b n \frac{(x-a+a)(x-a)^{n-1}}{(b-a)^n} dx \\
 &= \int_a^b n \frac{(x-a)^n}{(b-a)^n} dx + \int_a^b n \frac{a(x-a)^{n-1}}{(b-a)^n} dx \\
 &= \frac{n}{(b-a)^n} \left( \left[ \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} \right]_a^b + a \left[ \frac{(x-a)^n}{n} \right]_a^b \right) \\
 &= \boxed{\frac{1}{n+1}a + \frac{n}{n+1}b}
 \end{aligned}$$

**a.ii** En calculant de même  $\mathbb{E}(S_n^2)$  en supposant que  $[a, b] = [0, 1]$  on obtient facilement :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{V}(S_n) &= \mathbb{E}(S_n^2) - (\mathbb{E}(S_n))^2 \\
 &= \frac{n}{(n+2)(n+1)^2}
 \end{aligned}$$

La transformation affine  $x \mapsto a + (b-a)x$  permet d'achever le calcul et donne :

$$\mathbb{V}(S_n) = \frac{n(b-a)^2}{(n+2)(n+1)^2}$$

**a.iii** Comme  $\mathbb{E}(S_n) \neq b$  :

$$\boxed{S_n \text{ n'est pas un estimateur sans biais de } b}$$

**a.iv** Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(S_n) = b$  :

$$\boxed{S_n \text{ est asymptotiquement sans biais de } b}$$

**a.v** Comme  $\mathbb{E}(S_n) < b$  on risque souvent de sous-estimer  $b$  en ne corrigeant par  $S_n$ .

**b** Les mêmes calculs conduisent à :

$$\mathbb{E}(I_n) = \frac{n}{n+1}a + \frac{1}{n+1}b$$

On fait les mêmes remarques qu'aux questions précédentes sur les qualités de  $I_n$ .

**c** On déduit :

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} \mathbb{E}(S_n) = \frac{1}{n+1}a + \frac{n}{n+1}b \\ \mathbb{E}(I_n) = \frac{n}{n+1}a + \frac{1}{n+1}b \end{cases} \\
 \Leftrightarrow &\begin{cases} a = \frac{n\mathbb{E}(I_n) - \mathbb{E}(S_n)}{n-1} \\ b = \frac{n\mathbb{E}(S_n) - \mathbb{E}(I_n)}{n-1} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Des estimateurs  $A_n$  et  $B_n$  sans biais de  $a$  et  $b$  sont :

$$A_n = \frac{nI_n - S_n}{n-1} \text{ et } B_n = \frac{nS_n - I_n}{n-1} \text{ sont des estimateurs sans biais de } a \text{ et } b$$

## 5 Estimation ponctuelle et par intervalle

a.i

Nous avons :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq \theta \\ \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_0^x \frac{\lambda}{\theta} \left(\frac{\theta}{t}\right)^{\lambda+1} dt = 1 - \left(\frac{\theta}{x}\right)^\lambda & \text{si } x > \theta \end{cases}$$

a.ii

Là encore c'est une question culturelle qui donne (et que vous devez retrouver en concours) :

$$\begin{aligned} X \text{ admet une espérance} &\iff \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \text{ est absolument convergente} \\ &\iff \int_{\theta}^{+\infty} x \frac{\lambda}{\theta} \left(\frac{\theta}{x}\right)^{\lambda+1} dx \text{ est convergente} \\ &\iff \int_{\theta}^{+\infty} \lambda \left(\frac{\theta}{x}\right)^\lambda dx \text{ est convergente} \\ &\iff \lambda > 1 \\ X \text{ admet une variance} &\iff X^2 \text{ admet une espérance} \\ &\iff \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx \text{ est convergente} \\ &\iff \int_{\theta}^{+\infty} x^2 \frac{\lambda}{\theta} \left(\frac{\theta}{x}\right)^{\lambda+1} dx \text{ est convergente} \\ &\iff \int_{\theta}^{+\infty} \frac{\lambda \theta^\lambda}{x^{\lambda-1}} dx \text{ est convergente} \\ &\iff \lambda > 2 \end{aligned}$$

**Conclusion :**

$$\begin{aligned} \text{Si } \lambda > 1, \quad \mathbf{E}(X) &= \frac{\lambda \theta}{\lambda - 1} \\ \text{Si } \lambda > 2, \quad \mathbf{V}(X) &= \frac{\lambda \theta^2}{(\lambda - 2)(\lambda - 1)^2} \end{aligned}$$

a.iii

Les propriétés de  $\varphi : x \mapsto \ln\left(\frac{x}{\theta}\right)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  nous permettent de dire que  $Y$  reste une variable à densité et nous noterons  $F_Y$  sa fonction de répartition. Nous avons  $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$  et :

- si  $x \leq 0$ ,  $F_Y(x) = 0$ ,
- si  $x > 0$  :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbf{P}\left(\left[\ln\left(\frac{X}{\theta}\right) \leq x\right]\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\left[\frac{X}{\theta} \leq e^x\right]\right) \\ &= \mathbf{P}([X \leq \theta e^x]) \\ &= F_X(\theta e^x) \\ &= 1 - \left(\frac{\theta}{\theta e^x}\right)^\lambda \\ &= 1 - e^{-\lambda x} \end{aligned}$$

**Conclusion :**

$$Y \hookrightarrow \varepsilon(\lambda) \quad \text{soit} \quad Y \hookrightarrow \Gamma\left(\frac{1}{\lambda}, 1\right)$$

**b** Tout d'abord :

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{X_i}{\theta}\right) \\ &= \sum_{i=1}^n Y_i \end{aligned}$$

où les variables  $Y_i$  sont indépendantes car les variables  $X_i$  le sont. Alors par *stabilité de la loi gamma pour la somme de variables indépendantes* nous pouvons dire que :

$$T \hookrightarrow \Gamma\left(\frac{1}{\lambda}, n\right)$$

Une densité de  $T$  notée  $f_T$  est définie par :

$$\begin{aligned} f_T(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{e^{-\lambda x} x^{n-1}}{\left(\frac{1}{\lambda}\right)^n \Gamma(n)} & \text{si } x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\lambda^n e^{-\lambda x} x^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

**c** Nous avons  $\hat{\lambda} = \frac{n}{T}$  et donc d'après le *théorème de transfert* :

$$\begin{aligned} \hat{\lambda} \text{ admet une espérance} &\iff \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{x} f_T(x) dx \text{ est absolument convergente} \\ &\iff \int_0^{+\infty} \frac{n\lambda^n e^{-\lambda x} x^{n-2}}{(n-1)!} dx \text{ est convergente} \\ &\iff \frac{n\lambda}{n-1} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x}{1/\lambda}} x^{(n-1)-1}}{\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n-1} (n-2)!} dx \text{ est convergente} \\ &\iff \frac{n\lambda}{n-1} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x}{1/\lambda}} x^{(n-1)-1}}{\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n-1} \Gamma(n-1)} dx \text{ est convergente} \end{aligned}$$

En introduisant  $G$  une variable aléatoire suivant la loi gamma  $\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}, n-1\right)$  nous pouvons donc affirmer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x}{1/\lambda}} x^{(n-1)-1}}{\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n-1} \Gamma(n-1)} dx = 1$$

**Conclusion :**  $\hat{\lambda}$  admet une espérance égale à :

$$\mathbf{E}(\hat{\lambda}) = \frac{n\lambda}{n-1}$$

**d** Cherchons un estimateur de  $\lambda$ . Pour cela il suffit de prendre :

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{n-1}{n} \lambda$$

car dans ce cas  $\mathbf{E}(\widehat{\lambda}_1)$  existe et vaut :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\widehat{\lambda}_1) &= \frac{n-1}{n} \mathbf{E}(\widehat{\lambda}) \\ &= \lambda \end{aligned}$$

Pour savoir si l'estimateur  $\widehat{\lambda}_1$  est convergent montrons que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{V}(\widehat{\lambda}_1) = 0$ .

$$\begin{aligned} \widehat{\lambda} \text{ admet une variance} &\iff \widehat{\lambda}^2 \text{ admet une espérance} \\ &\iff \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{n}{x}\right)^2 f_T(x) dx \text{ est convergente} \\ &\iff \int_0^{+\infty} \frac{n^2 \lambda^n e^{-\lambda x} x^{n-3}}{(n-1)!} dx \text{ est convergente} \\ &\iff \frac{(n\lambda)^2}{(n-1)(n-2)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x}{1/\lambda}} x^{(n-2)-1}}{\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n-2} (n-3)!} dx \text{ est convergente} \\ &\iff \frac{(n\lambda)^2}{(n-1)(n-2)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x}{1/\lambda}} x^{(n-2)-1}}{\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n-2} \Gamma(n-2)} dx \text{ est convergente} \end{aligned}$$

En introduisant  $H$  une variable aléatoire suivant la loi gamma  $\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}, n-2\right)$ , nous pouvons donc affirmer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x}{1/\lambda}} x^{(n-2)-1}}{\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n-2} \Gamma(n-2)} dx = 1$$

et que  $\mathbf{E}(\widehat{\lambda}^2)$  qui existe vaut :

$$\mathbf{E}(\widehat{\lambda}^2) = \frac{(n\lambda)^2}{(n-1)(n-2)}$$

**Conclusion :**  $\widehat{\lambda}$  admet une variance égale selon le *théorème de Huygens-Koenig* à :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\widehat{\lambda}) &= \mathbf{E}(\widehat{\lambda}^2) - (\mathbf{E}(\widehat{\lambda}))^2 \\ &= \frac{(n\lambda)^2}{(n-1)(n-2)} - \left(\frac{n\lambda}{n-1}\right)^2 \\ &= \frac{\lambda^2 n^2}{(n-1)^2 (n-2)} \end{aligned}$$

et comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{V}(\widehat{\lambda}_1) = 0$  du fait que :

$$\frac{\lambda^2 n^2}{(n-1)^2 (n-2)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\lambda^2}{n}$$

nous pouvons affirmer que :

l'estimateur  $\widehat{\lambda}_1$  est convergent

e Nous avons :

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}([-1.96 \leq Z_n \leq 1.96]) = 0.95 \\
\iff & \mathbf{P}\left(\left[-1.96 \leq \frac{\sqrt{n}(\hat{\lambda} - \lambda)}{\lambda} \leq 1.96\right]\right) = 0.95 \\
\iff & \mathbf{P}\left(\left[-1.96\lambda \leq \sqrt{n}(\hat{\lambda} - \lambda) \leq 1.96\lambda\right]\right) = 0.95 \\
\iff & \mathbf{P}\left(\left[\frac{-1.96\lambda}{\sqrt{n}} \leq \hat{\lambda} - \lambda \leq \frac{1.96\lambda}{\sqrt{n}}\right]\right) = 0.95 \\
\iff & \mathbf{P}\left(\left[\lambda - \frac{1.96\lambda}{\sqrt{n}} \leq \hat{\lambda} \leq \lambda + \frac{1.96\lambda}{\sqrt{n}}\right]\right) = 0.95 \\
\iff & \mathbf{P}\left(\left[\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + 1.96}\hat{\lambda} \leq \lambda \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} - 1.96}\hat{\lambda}\right]\right) = 0.95
\end{aligned}$$

Nous obtenons donc que :

$$\begin{aligned}
IC_{5\%} &= \left[ \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + 1.96}\lambda_0 \ ; \ \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} - 1.96}\lambda_0 \right] \\
&= \boxed{[ 4.18 \ ; \ 6.22 ]}
\end{aligned}$$

## 6 Estimation ponctuelle

**a** D'après le cours, la stabilité de la loi de Poisson pour la somme de variables indépendantes nous permet d'écrire que :

$$\boxed{X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)}$$

Pour les mêmes raisons on montre très facilement par récurrence que :

$$\boxed{S_n = \sum_{k=1}^n X_k \hookrightarrow \mathcal{P}(n\lambda)}$$

**b** Comme  $S_n$  admet une espérance,  $M_n$  en admet une aussi égale à :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M_n) &= \frac{1}{n}\mathbb{E}(S_n) \\
&= \frac{n\lambda}{n} \\
&= \lambda
\end{aligned}$$

Ainsi  $B(M_n, \lambda) = 0$  et :

$$\boxed{M_n \text{ est un estimateur sans biais de } \lambda}$$

Comme  $S_n$  admet une variance,  $M_n$  en admet une aussi égale à :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(M_n) &= \frac{1}{n^2}\mathbb{V}(S_n) \\
&= \frac{n\lambda}{n^2} \\
&= \boxed{\frac{\lambda}{n}}
\end{aligned}$$

**c.i** Par le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}
T_n \text{ admet une espérance} &\iff \sum_k \exp\left(-q\frac{k}{n}\right) \mathbf{P}([S_n = k]), \quad k \geq 0 \text{ est cvte} \\
&\iff \sum_k \exp\left(-q\frac{k}{n}\right) \frac{e^{-n\lambda} (n\lambda)^k}{k!}, \quad k \geq 0 \text{ est cvte} \\
&\iff e^{-n\lambda} \sum_k \frac{\left(n\lambda e^{-\frac{q}{n}}\right)^k}{k!}, \quad k \geq 0 \text{ est cvte}
\end{aligned}$$

A ce niveau nous constatons que nous sommes en présence d'une *série convergente en tant que série exponentielle* avec  $n\lambda e^{-\frac{q}{n}} \in \mathbb{R}$ . Dans ce cas  $\mathbb{E}(T_n)$  existe et est égale à :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T_n) &= e^{-n\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(n\lambda e^{-\frac{q}{n}}\right)^k}{k!} \\
&= e^{-n\lambda} \exp\left(n\lambda e^{-\frac{q}{n}}\right) \\
&= \boxed{\exp\left(n\lambda \left(e^{-\frac{q}{n}} - 1\right)\right)}
\end{aligned}$$

c.ii

Comme  $\mathbb{E}(T_n) \neq e^{-q\lambda}$  :

$$\boxed{T_n \text{ n'est pas un estimateur sans biais de } e^{-q\lambda}}$$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(T_n) = e^{-q\lambda}}$$

car :

$$n\lambda \left(e^{-\frac{q}{n}} - 1\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{n\lambda q}{n} \underset{+\infty}{\sim} -\lambda q$$

et la fonction exp est continue sur  $\mathbb{R}$ .

c.iii

Par le *théorème de transfert* :

$$\begin{aligned}
T_n \text{ admet une variance} &\iff T_n^2 \text{ admet une espérance} \\
&\iff \sum_k \exp\left(-q\frac{2k}{n}\right) \mathbf{P}([S_n = k]), \quad k \geq 0 \text{ est cvte} \\
&\iff \sum_k \exp\left(-q\frac{2k}{n}\right) \frac{e^{-n\lambda} (n\lambda)^k}{k!}, \quad k \geq 0 \text{ est cvte} \\
&\iff e^{-n\lambda} \sum_k \frac{\left(n\lambda e^{-\frac{2q}{n}}\right)^k}{k!}, \quad k \geq 0 \text{ est cvte}
\end{aligned}$$

A ce niveau nous constatons que nous sommes en présence d'une *série convergente en tant que série exponentielle* avec  $n\lambda e^{-\frac{2q}{n}} \in \mathbb{R}$ . Dans ce cas  $\mathbb{E}(T_n^2)$  existe et est égale à :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T_n^2) &= e^{-n\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(n\lambda e^{-\frac{2q}{n}}\right)^k}{k!} \\
&= e^{-n\lambda} \exp\left(n\lambda e^{-\frac{2q}{n}}\right) \\
&= \exp\left(n\lambda \left(e^{-\frac{2q}{n}} - 1\right)\right)
\end{aligned}$$

**Conclusion :**  $\mathbb{V}(T_n)$  existe et vaut par le théorème de Hyugens-Koenig :

$$\mathbb{V}(T_n) = \exp\left(n\lambda\left(e^{-\frac{2q}{n}} - 1\right)\right) - \exp\left(2n\lambda\left(e^{-\frac{q}{n}} - 1\right)\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(T_n^2) = e^{-2q\lambda}$$

car :

$$n\lambda\left(e^{-\frac{2q}{n}} - 1\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{2n\lambda q}{n} \underset{+\infty}{\sim} -2\lambda q$$

et la fonction exp est continue sur  $\mathbb{R}$ . On a aussi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\mathbb{E}(T_n))^2 = e^{-2q\lambda}$$

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{V}(T_n) = 0$$

**Conclusion :**  $T_n$  étant un estimateur asymptotique sans biais de  $e^{-q\lambda}$  de variance tendant vers 0, ceci est une condition suffisante pour dire que :

$$T_n \text{ est un estimateur convergent}$$

**d.i** Comme  $g(S_n)$  un estimateur sans biais de  $e^{-q\lambda}$ ,  $\mathbb{E}(g(S_n))$  existe et vaut :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} g(k) \mathbf{P}([S_n = k]) = e^{-q\lambda}$$

Soit :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} g(k) \frac{e^{-n\lambda} (n\lambda)^k}{k!} = e^{-q\lambda}$$

soit encore :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n^k g(k)}{k!} \lambda^k = e^{(n-q)\lambda}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n^k g(k)}{k!} \lambda^k = e^{(n-q)\lambda} \\ \Leftrightarrow & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(n\lambda)^k g(k)}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{((n-q)\lambda)^k}{k!} \\ \Leftrightarrow & \sum_{k=0}^{+\infty} \left[ \frac{(n\lambda)^k g(k)}{k!} - \frac{((n-q)\lambda)^k}{k!} \right] = 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{k=0}^{+\infty} \left[ \frac{n^k g(k)}{k!} - \frac{(n-q)^k}{k!} \right] \lambda^k = 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{k=0}^{+\infty} \left[ \frac{n^k g(k) - (n-q)^k}{k!} \right] \lambda^k = 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{k=0}^{+\infty} \left[ \frac{g(k) - \left(\frac{n-q}{n}\right)^k}{k!} \right] (n\lambda)^k = 0 \end{aligned}$$

et grâce au résultat admis :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad g(k) = \left(\frac{n-q}{n}\right)^k$$

Ainsi le seul estimateur sans biais, fonction de  $S_n$  de  $e^{-q\lambda}$  est :

$$Z_n = \left(1 - \frac{q}{n}\right)^{S_n}$$

d.ii

Lorsque  $q > n$  on risque d'estimer une probabilité par un nombre négatif si  $S_n$  est impaire !

d.iii

$$\begin{aligned} Z_n &= \left(1 - \frac{q}{n}\right)^{S_n} = \exp\left(S_n \ln\left(1 - \frac{q}{n}\right)\right) \\ &\simeq \exp\left(-\frac{S_n q}{n}\right) \end{aligned}$$

et

$Z_n$  est très peu différent de  $T_n$

