

# Les 13 lois du programme

Le document comporte 5 pages.

Les lois sont présentées par ordre alphabétique.

## 1 Loi de Bernoulli : "loi du oui ou non" (S)

- **Notation** :  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ .
- **Paramètre** :  $p \in ]0, 1[$ .
- **Epreuve type** : épreuve amenant deux issues seulement : succès ou échec.
- $X(\Omega) = \{0, 1\}$
- $\mathbf{P}([X = 0]) = 1 - p$  ;  $\mathbf{P}([X = 1]) = p$
- $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - p & \text{si } x \in [0, 1[ \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$
- $\mathbf{E}(X) = p$
- $\mathbf{V}(X) = p(1 - p)$
- $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p) \iff 1 - X \hookrightarrow \mathcal{B}(1 - p)$
- $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1, p) \iff X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$
- $X_1, X_2, \dots, X_n$  (*iid*) |  $\forall k \in [1, n]$ ,  $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p) \implies \sum_{k=1}^n X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$

## 2 Loi binomiale : loi des tirages avec remise (S)

- **Notation** :  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ .
- **Paramètres** :  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $p \in ]0, 1[$ .
- **Epreuve type** : succession de  $n$  épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre  $p$ .

- $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$
- $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\mathbf{P}([X = k]) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$
- $\mathbf{E}(X) = np$
- $\mathbf{V}(X) = np(1 - p)$
- $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p) \iff n - X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1 - p)$
- $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1, p) \iff X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$
- $X_1, X_2, \dots, X_n$  (*iid*) |  $\forall k \in [1, n]$ ,  $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p) \implies \sum_{k=1}^n X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$
- $\boxplus_{k=1}^n \mathcal{B}(n_k, p) \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\sum_{k=1}^n n_k, p\right)$  (**stabilité** de la loi binomiale pour la **somme** de variables **indépendantes**)

## 3 Loi de Dirac (S)

- **Notation** :  $X \hookrightarrow \delta_c$
- **Paramètre** :  $c \in \mathbf{R}$
- **Epreuve type** : numéro associée à une boule tirée d'une urne ne contenant que des boules ayant le même numéro  $c$ .
- $X(\Omega) = \{c\}$
- $\mathbf{P}([X = c]) = 1$
- $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < c \\ 1 & \text{si } x \geq c \end{cases}$
- $\mathbf{E}(X) = c$
- $\mathbf{V}(X) = 0$
- $\mathbf{V}(X) = 0 \iff X \hookrightarrow \delta$
- $\mathbf{E}(X^2) = 0 \implies X \hookrightarrow \delta_0$

## 4 Loi exponentielle (loi sans mémoire) ©

- **Notation** :  $X \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)$
- **Paramètre** :  $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$
- **Epreuve type** : temps d'attente entre deux phénomènes indépendants tels que des arrivées à un guichet, ou des appels téléphoniques.
- $X(\Omega) = \mathbf{R}_+$
- $f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$
- $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$
- $\mathbf{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$
- $\mathbf{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
- $X \hookrightarrow \varepsilon(\lambda) \iff \forall (x, y) \in \mathbf{R}_+^2, \mathbf{P}_{[X > x]}([X > x + y]) = \mathbf{P}([X > y])$  (**absence de mémoire**) ce qui s'est passé sur l'intervalle  $]-\infty, x]$  n'affecte en rien ce qui se passera sur l'intervalle  $]x, x + y]$
- $\varepsilon(\lambda) = \Gamma\left(\frac{1}{\lambda}, 1\right)$
- $\boxplus_{k=1}^n \varepsilon(\lambda) = \Gamma\left(\frac{1}{\lambda}, n\right)$
- Soit  $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda x)$  et  $X \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)$  alors  $\mathbf{P}([X > x]) = \mathbf{P}([Y = 0])$

## 5 Loi grand gamma ©

- **Notation** :  $X \hookrightarrow \Gamma(b, t)$
- **Paramètres** :  $b \in \mathbf{R}_+^*, t \in \mathbf{R}_+^*$
- $X(\Omega) = \mathbf{R}_+^*$

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{e^{-\frac{x}{b}} x^{t-1}}{\Gamma(t) b^t} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- $\mathbf{E}(X) = bt$
- $\mathbf{V}(X) = b^2 t$
- $\forall (t_1, t_2) \in (\mathbf{R}_+^*)^2, \int_0^1 v^{t_1-1} (1-v)^{t_2-1} du = \frac{\Gamma(t_1) \Gamma(t_2)}{\Gamma(t_1 + t_2)}$
- $\Gamma(1, t) = \gamma(t)$
- $\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}, 1\right) = \varepsilon(\lambda)$
- $\boxplus_{k=1}^n \Gamma(b, t_k) = \Gamma\left(b, \sum_{k=1}^n t_k\right)$
- $X_1, X_2, \dots, X_n$  (iid) |  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, X_k \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1) \implies \sum_{k=1}^n X_k^2 \hookrightarrow \Gamma\left(2, \frac{n}{2}\right)$  (hors programme mais ...)
- $X \hookrightarrow \Gamma(b, n)$  et  $n \geq 30 \implies X \underset{\cong}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(bn, b^2 n)$  (hors programme mais ...)

## 6 Loi petit gamma ©

- **Notation** :  $X \hookrightarrow \gamma(t)$
- **Paramètre** :  $t \in \mathbf{R}_+^*$
- $X(\Omega) = \mathbf{R}_+^*$
- $f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{e^{-x} x^{t-1}}{\Gamma(t)} & \text{si } x > 0 \end{cases}$
- $\mathbf{E}(X) = t$
- $\mathbf{V}(X) = t$
- $\gamma(t) = \Gamma(1, t)$

## 7 Loi géométrique : loi du temps d'attente du premier succès (loi sans mémoire) (S)

- **Notation** :  $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$
- **Paramètre** :  $p \in ]0, 1[$
- **Epreuve type** : c'est le rang d'apparition du premier succès lors d'une succession illimitée d'épreuves de Bernoulli.
- $X(\Omega) = \mathbf{N}^*$
- $\forall k \in \mathbf{N}^*, \mathbf{P}([X = k]) = q^{k-1}p$  avec  $q = 1 - p$
- $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - q^k & \text{si } x \in [k, k + 1[, \quad k \in \mathbf{N}^* \end{cases}$  avec  $q = 1 - p$
- $\mathbf{E}(X) = \frac{1}{p}$
- $\mathbf{V}(X) = \frac{q}{p^2}$  avec  $q = 1 - p$
- $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \iff \forall (m, n) \in \mathbf{N}^2, \mathbf{P}_{[X > n]}([X > m + n]) = \mathbf{P}([X > m])$  (**absence de mémoire**) ce qui s'est passé sur l'intervalle  $]-\infty, n]$  n'affecte en rien ce qui se passera sur l'intervalle  $]n, n + m]$

## 8 Loi hypergéométrique : loi des tirages sans remise (S)

- **Notation** :  $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N, n, p)$
- **Paramètres** :  $N \in \mathbf{N}^*, n \in \llbracket 0, N \rrbracket, p \in ]0, 1[ \mid (Np, N(1-p)) \in \mathbf{N}^2$
- **Epreuve type** : c'est le nombre de boules blanches obtenues à partir d'une succession de  $n$  tirages effectués sans remise à partir d'une urne bicolore.
- $X(\Omega) = \llbracket \max(0, n - Nq), \min(Np, n) \rrbracket$
- $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbf{P}([X = k]) = \frac{\binom{Np}{k} \binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}$
- $\mathbf{E}(X) = np$

- $\mathbf{V}(X) = np(1-p) \left( \frac{N-n}{N-1} \right)$
- **Approximation** :  $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N, n, p)$  et  $N \geq 10n \implies X \underset{\approx}{\hookrightarrow} \mathcal{B}(n, p)$

## 9 Loi normale centrée et réduite ou de Laplace-Gauss (C)

- **Notation** :  $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$
- **Paramètres** : 0 et 1
- $X(\Omega) = \mathbf{R}$
- $\forall x \in \mathbf{R}, f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$  (**intégrale de Gauss**)
- $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$  (**autre version de l'intégrale de Gauss**)
- $\forall x \in \mathbf{R}, \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  (intégrale tabulée)
- $\forall x \in \mathbf{R}, \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$
- **Mode** : 0
- **Médiane** : 0
- $\mathbf{E}(X) = 0$
- $\mathbf{V}(X) = 1$
- $\mathbf{E}(X^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \in 2\mathbf{N} + 1 \\ \frac{(2m)!}{2^m m!} & \text{si } n = 2m \in 2\mathbf{N} \end{cases}$  (à retrouver !)
- $\frac{X - m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1) \iff X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$
- $\bigoplus_{k=1}^n \mathcal{N}(0, 1) = \mathcal{N}(0, n)$  (**stabilité** de la loi normale pour la **somme** de variables **indépendantes**)

- $X_1, X_2, \dots, X_n$  (iid) |  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, X_k \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1) \implies \sum_{k=1}^n X_k^2 \hookrightarrow \Gamma\left(2, \frac{n}{2}\right)$  (hors programme mais ...)

- **Approximations :**

$$- \begin{cases} X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p) \\ n \geq 30 \quad np \geq 5 \quad n(1-p) \geq 5 \end{cases} \implies X \underset{\simeq}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(np, np(1-p))$$

$$- \begin{cases} X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda) \\ \lambda \geq 15 \end{cases} \implies X \underset{\simeq}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(\lambda, \lambda)$$

## 10 Loi normale quelconque ou de Laplace-Gauss ©

- **Notation :**  $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

- **Paramètres :**  $m \in \mathbb{R}$  et  $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+^*$

- $X(\Omega) = \mathbb{R}$

- $\forall x \in \mathbb{R}, f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$

- **Mode :**  $m$

- **Médiane :**  $m$

- $\mathbf{E}(X) = m$

- $\mathbf{V}(X) = \sigma^2$

- $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2) \iff \frac{X-m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$  (théorème fondamental de la loi normale)

- $\boxplus_{k=1}^n \mathcal{N}(m_k, \sigma_k^2) = \mathcal{N}\left(\sum_{k=1}^n m_k, \sum_{k=1}^n \sigma_k^2\right)$  (**stabilité** de la loi normale pour la **somme** de variables **indépendantes**)

- **Approximations :**

$$- \begin{cases} X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p) \\ n \geq 30 \quad np \geq 5 \quad n(1-p) \geq 5 \end{cases} \implies X \underset{\simeq}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(np, np(1-p))$$

$$- \begin{cases} X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda) \\ \lambda \geq 15 \end{cases} \implies X \underset{\simeq}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(\lambda, \lambda)$$

$$- (X_n)_{n \geq 1} \text{ iid} \implies \left( \frac{\sum_{k=1}^n X_k - \mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)}{\sigma\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)} \right)_{n \geq 1} \xrightarrow{\mathcal{L}} N \text{ où } N \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1) \text{ (TCL)}$$

## 11 Loi de Poisson : loi des phénomènes rares ©

- **Notation :**  $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$

- **Paramètre :**  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$

- **Epreuve type :** nombre d'apparitions d'un phénomène rare durant un intervalle de temps donné.

- $X(\Omega) = \mathbb{N}$

- $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbf{P}([X = k]) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$

- $\mathbf{E}(X) = \lambda$

- $\mathbf{V}(X) = \lambda$

- $\boxplus_{k=1}^n \mathcal{P}(\lambda_k) = \mathcal{P}\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k\right)$  (**stabilité** de la loi de Poisson pour la **somme** de variables **indépendantes**)

- $\mathbf{P}([X = 0]) = 1 - F_Y(1)$  où  $Y \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)$

- Soit  $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda x)$  et  $Y \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)$  alors  $\mathbf{P}([X > x]) = \mathbf{P}([Y = 0])$

- **Approximations :**

$$- \begin{cases} X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda) \\ \lambda \geq 15 \end{cases} \implies X \underset{\simeq}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(\lambda, \lambda)$$

$$- X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p) \text{ et } n \geq 30, p < 0.1 \implies X \underset{\simeq}{\hookrightarrow} \mathcal{P}(np)$$

## 12 Loi uniforme continue ③

- **Notation** :  $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$
- **Paramètres** :  $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, a < b$
- $X(\Omega) = [a, b]$
- $f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{si } x > b \end{cases}$
- $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$
- $\mathbf{E}(X) = \frac{a+b}{2}$
- $\mathbf{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
- $X \hookrightarrow \mathcal{U}(]0, 1]) \implies -\frac{1}{\lambda} \ln X \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)$

## 13 Loi uniforme discrète ⑤

- **Notation** :  $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$
- **Paramètre** :  $\llbracket 1, n \rrbracket$
- **Epreuve type** : numéro d'une boule tirée d'une urne constituée de boules numérotées de 1 à  $n$ .
- $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$
- $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{n}$
- $\mathbf{E}(X) = \frac{n+1}{2}$
- $\mathbf{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$

