

# Le 05/05/2009 à 07H55

## DENOMBREMENT

**T** : Soit  $A$  et  $B$  deux ensembles tels que  $A$  est fini et  $B \subset A$ , alors  $|B| \leq |A|$ ,  $|A - B| = |A| - |B|$ ,  $|A| = |B| \Leftrightarrow A = B$ .  $|A \uplus B| = |A| + |B|$ ,  $\left| \biguplus_{k=1}^n A_k \right| = \sum_{k=1}^n |A_k|$ . **Poincaré** :  $\left| \bigcup_{k=1}^n A_k \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|$ .  $\left| \prod_{k=1}^n A_k \right| = \prod_{k=1}^n |A_k|$ . **D**  $(A_i)_{i \in I}$  **partition** de  $E$  :  $\forall i \in I, A_i \neq \emptyset, \forall (i, j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$  et  $\biguplus_{i \in I} A_i = E$ . Rq c'est la

même déf. pour un SCE avec  $E = \Omega$ . **T** **Lemme des bergers** : Soit  $E$  et  $F$  deux ens. finis et  $f$  une application surj. de  $E$  vers  $F$ . On suppose  $\exists p \in \mathbb{N}^* \mid \forall y \in F, |f^{-1}(\{y\})| = p$ . Alors  $|E| = p|F|$ . **T** **Nb d'applications** de  $E$  vers  $F$  :  $|\mathcal{A}(E, F)| = |F|^{|E|}$ . **T** **Nb d'injections** de  $E_p$  vers  $F_n$  :  $A_p^n$ . **T** **Nb de permutations** de  $E_n$  :  $A_n^n = n!$  **T** **Nb de  $p$ -listes** de  $E_n$  :  $n^p$ . **T** **Nb de combinaisons** de  $p$  élts de  $E_n$ , avec  $1 \leq p \leq n$  :  $\binom{n}{p} = \frac{A_p^n}{p!}$ .  $|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}$ . **T** **Pb des anags** :  $\binom{n}{n_1} \times \binom{n-n_1}{n_2} \times \dots \times \binom{n-n_1-\dots-n_{p-1}}{n_p} = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_p!}$ . **T** **Suites** :  $\left| \{(x_1, x_2, \dots, x_p) \in (\mathbb{N}^*)^p \mid 1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_p \leq n\} \right| = \binom{n}{p}$   $\left| \{(x_1, x_2, \dots, x_p) \in (\mathbb{N}^*)^p \mid 1 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_p \leq n\} \right| = \binom{p+n-1}{p}$  **T**

## ESPACES PROBABILISES

**D** **d'une tribu** : Tout ensemble de parties d'un ensemble  $\Omega$ , contenant  $\Omega$ , stable par réunion au plus dénombrable et par passage au complémentaire, s'appelle une tribu ou  $\sigma$ -algèbre sur  $\Omega$ , notée  $\mathcal{A}$ . Autrement dit :  $\Omega \in \mathcal{A}, \forall A \in \mathcal{A}, \bar{A} \in \mathcal{A}$ , Pour toute suite  $(A_n)_n$  d'événements de  $\mathcal{A}, \bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$ . **P** :  $\emptyset \in \mathcal{A}, \mathcal{A}$

est stable pour  $\cap, -, \Delta$ . **D** **axiomatique d'une probabilité** : Soit  $(\Omega, \mathcal{A})$  un espace probabilisable, on appelle probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{A})$  toute application  $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  vérifiant :

$P(\Omega) = 1, \forall (A_k)_{k \in K}$ , deux à deux disjoints  $\sum_k P(A_k) < \infty$  et  $P\left(\biguplus_{k \in K} A_k\right) = \sum_{k \in K} P(A_k)$

( $\sigma$ -additivité de **P**). **D** On appelle espace probabilisé tout triplet  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . **T** Soit  $A$  et  $B$  deux évts de  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  :  $P(\emptyset) = 0, P(A \uplus B) = P(A) + P(B), P(\bar{A}) = 1 - P(A), P(A - B) = P(A) - P(A \cap B), B \subset A \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(B), B \subset A \Rightarrow P(B) \leq P(A)$  (**P**  $\nearrow$ ),  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), P\left(\biguplus_{k=1}^n A_k\right) =$

$\sum_{k=1}^n P(A_k)$ . **T** **limite monotone** :  $(A_n)_{n \geq 0} \nearrow \Rightarrow P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$ ,

$(A_n)_{n \geq 0} \searrow \Rightarrow P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$ . **C**  $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right)$

et  $P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right)$ . **T** **Inégalité de Boole ou sous-additivité** :

$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \sum_{k=1}^n P(A_k)$  et  $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$ . **T** **Relation de Laplace** (cas

d'équiprobabilité)  $\forall A \in \mathcal{A}, P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ . **D** **Ind. des évts** : (2 évts) :  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ , ( $n$  évts 2 à 2) :  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$ ,

( $n$  évts mutuel<sup>t</sup>) :  $\forall I \in \mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket), I \neq \emptyset, P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$ , (suites d'évts)

on se ramène au cas fini pour toutes sous-suites finies. **P**  $A \perp B \Leftrightarrow A \perp \bar{B}$  et  $\bar{A} \perp B$  et  $\bar{A} \perp \bar{B}$ . Soit  $(A_n)_n$  une suite d'évts indpts alors  $(B_n)_n$  où  $\forall n, B_n = A_n$  ou  $\bar{A}_n$  reste une suite d'évts indpts **D** :  $\forall A \in \mathcal{A} \mid P(A) \neq 0, P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ .

**P** Toutes les propriétés vues sur les probas inconditionnelles sont encore valable. Soit  $P(A) \neq 0, A \perp B \Leftrightarrow P_A(B) = P(B)$ . Soit  $P(B) \neq 0, A \perp B \Leftrightarrow P_B(A) = P(A)$ .

**T** **FPC** : Soit  $A_1, \dots, A_n, n$  évts tq  $\forall n \in \mathbb{N}_2, P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$ , alors  $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$ . **T** **FPT** : Soit

$(A_k)_{k \in K}$  un SCE tq  $\forall k \in K, P(A_k) \neq 0$ , alors  $\forall B \in \mathcal{A}, \sum_k P_{A_k}(B)P(A_k) < \infty$

et  $P(B) = \sum_{k \in K} P_{A_k}(B)P(A_k)$ . **T** **BAYES** : Soit  $(A_k)_{k \in K}$  un SCE tq  $\forall k \in K,$

$P(A_k) \neq 0$ , alors  $\forall B \in \mathcal{A} \mid P(B) \neq 0 : \forall i \in K, P_B(A_i) = \frac{P_{A_i}(B)P(A_i)}{\sum_{k \in K} P_{A_k}(B)P(A_k)}$ .

## VAR

**D** **SC** :  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \forall I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}), X^{-1}(I) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in I\} \in \mathcal{A}$ .

**D** **S** :  $X$  VARD si  $X(\Omega)$  est au plus dénombrable. **D** **C** :  $X$  VARAD si  $X(\Omega)$  est  $\infty$  et indénombrable. **D** **SCC** :  $X = Y \Leftrightarrow \forall \omega \in \Omega, X(\omega) = Y(\omega)$ .

**SCC** :  $X = Y$  ps  $\Leftrightarrow P([X = Y]) = 1$ . **D** **Loi de proba S** :  $P_X : X(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ ,

déf par  $\forall x \in X(\Omega), P_X(x) = P([X = x])$ . **C** : On donne une densité de  $X$ . **T** **SCC** :  $X = Y \Rightarrow \mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(Y)$ . **SCC** :  $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(Y) \Rightarrow \mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y)$  et  $\mathbf{V}(X) = \mathbf{V}(Y)$ . **T** **C** :  $f$  densité  $\Leftrightarrow f \geq 0$  sur  $\mathbb{R}, \mathcal{C}^0$  presque partout,  $\int_{-\infty}^{+\infty} f$  converge et vaut 1. **D** **FR S** :  $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \sum_{\substack{x_i \in X(\Omega) \\ x_i \leq x}} P([X = x_i])$ . **C** :  $\forall x \in \mathbb{R},$

$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$ . **T** **C** :  $F' = f$  là ou  $F$  est dérivable ie là où  $f$  est continue. **P**

**SCC** : Dans le cas général  $\lim_{-\infty} F = 0, \lim_{+\infty} F = 1, F \mathcal{C}^0$  à droite en tout point de  $\mathbb{R}, F$

non décroissante. **©** : On rajoute  $F \in C^0$  sur  $\mathbb{R}$  et  $F \in C^1$  sur  $\mathbb{R} - I$  ( $I$  ens fini éventuellement vide). **T** **©** :  $\mathbf{P}([X = a]) = F_X(a) - F_X(a^-)$ ,  $\mathbf{P}([a \leq X \leq b]) = F_X(b) - F_X(a^-)$ ,  $\mathbf{P}([a < X \leq b]) = F_X(b) - F_X(a)$ ,  $\mathbf{P}([a \leq X < b]) = F_X(b^-) - F_X(a^-)$ ,  $\mathbf{P}([a < X < b]) = F_X(b^-) - F_X(a)$ . **©** :  $\mathbf{P}([a \leq X \leq b]) = \mathbf{P}([a < X \leq b]) = \mathbf{P}([a \leq X < b]) = \mathbf{P}([a < X < b]) = \int_a^b f_X(u) du$ . **T**  $\forall B \subset X(\Omega) \Rightarrow \mathbf{P}(B) =$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{x_i \in B} \mathbf{P}([X = x_i]) \text{ } \textcircled{\text{D}} \\ \int_{x \in B} f(x) dx \text{ } \textcircled{\text{C}} \end{array} \right. \quad \textcircled{\text{D}} \quad \mathbf{E}(X) = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i \mathbf{P}([X = x_i]) \text{ srca } \textcircled{\text{D}} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \text{ src } \textcircled{\text{C}} \end{array} \right. \quad \textcircled{\text{P}} \quad \textcircled{\text{S}} \textcircled{\text{C}} :$$

$\forall X \in \mathcal{L}^1, X \geq 0 \Rightarrow \mathbf{E}(X) \geq 0$ . **©** **©** :  $\forall (X, Y) \in (\mathcal{L}^1)^2, X \leq Y \Rightarrow \mathbf{E}(X) \leq \mathbf{E}(Y)$ . **©** **©** :  $\forall (X, Y) \in (\mathcal{L}^1)^2, X = Y \Rightarrow \mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y)$  **©** **©** :  $\forall Y \in \mathcal{L}^1$  et  $X$  tq  $|X| \leq Y \Rightarrow X \in \mathcal{L}^1$  et  $\mathbf{E}(|X|) \leq \mathbf{E}(Y)$ . **©** **©** :  $\forall X \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow |\mathbf{E}(X)| \leq \mathbf{E}(|X|)$ . **D** **Esp. cond** **©** :  $\forall A \in \mathcal{A} \mid \mathbf{P}(A) \neq 0 : \mathbf{E}(X \mid A) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i \mathbf{P}_A([X = x_i])$ . **T** **Formule de l'esp. totale**

**©** Soit  $(A_i)_{i \in I}$  un SCE tq  $\forall i \in I, \mathbf{P}(A_i) \neq 0, \mathbf{E}(X) = \sum_{i \in I} \mathbf{E}(X \mid A_i) \mathbf{P}(A_i)$  src. **T**

**de transfert**  $\mathbf{E}(\varphi(X)) = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{x_i \in X(\Omega)} \varphi(x_i) \mathbf{P}([X = x_i]) \text{ srca où } \varphi \text{ déf sur } X(\Omega) \text{ } \textcircled{\text{S}} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) dx \text{ srca où } \varphi \text{ est } C^0 \text{ presque partout } \textcircled{\text{C}} \end{array} \right.$

**D**  $\mathbf{V}(X) = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{x_i \in X(\Omega)} (x_i - \mathbf{E}(X))^2 \mathbf{P}([X = x_i]) \text{ src } \textcircled{\text{S}} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - \mathbf{E}(X))^2 f(x) dx \text{ src } \textcircled{\text{C}} \end{array} \right. \quad \textcircled{\text{S}} \textcircled{\text{C}} : \quad \sigma(X) =$

$\sqrt{\mathbf{V}(X)}$ . **T** **THK** **©** **©** :  $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2$ . **T** **©** **©** :  $\mathbf{E}(aX + b) = a\mathbf{E}(X) + b$  et  $\mathbf{V}(aX + b) = a^2\mathbf{V}(X)$ . **D** **Moments**  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,

$m_r(X) = \mathbf{E}(X^r) = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i^r \mathbf{P}([X = x_i]) \text{ srca } \textcircled{\text{S}} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x) dx \text{ src } \textcircled{\text{C}} \end{array} \right. , \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \mu_r(X) =$

$\mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))^r) = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{x_i \in X(\Omega)} (x_i - \mathbf{E}(X))^r \mathbf{P}([X = x_i]) \text{ srca } \textcircled{\text{S}} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - \mathbf{E}(X))^r f(x) dx \text{ srca } \textcircled{\text{C}} \end{array} \right. \quad \textcircled{\text{S}} \quad \forall r \in \mathbb{N}^*$

$\mathbf{E}(X(X-1)\dots(X-r+1)) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i(x_i-1)\dots(x_i-r+1) \mathbf{P}([X = x_i])$  srca. **T**

**©** **©** : Soit  $r \in \mathbb{N}$  alors  $\exists m_{r+1}(X) \Rightarrow \forall k \in \llbracket 0, r \rrbracket, \exists m_k(X)$ . **©** **©** :  $\exists \mu_{r+1}(X) \Rightarrow \forall k \in \llbracket 0, r \rrbracket, \exists \mu_k(X)$ . **©** **©** :  $\forall r \in \mathbb{N}, \exists m_r(X) \Leftrightarrow \exists \mu_r(X)$ .

**VECTEURS ALEATOIRES** **Couples discrets** **D** **Loi de proba d'un couple**

Soit  $C = (X, Y)$ .  $P_C : X(\Omega) \times Y(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ , déf. par  $\forall (x_i, y_j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ ,

$P_C(x_i, y_j) = \mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = p_{i,j}$ . **D** **Lois marginales**  $P_X : X(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ , déf. par  $\forall x_i \in X(\Omega), P_X(x_i) = \mathbf{P}([X = x_i])$  et  $P_Y : Y(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ , déf par  $\forall y_j \in Y(\Omega), P_Y(y_j) = \mathbf{P}([Y = y_j])$ . **T**  $\forall x_i \in X(\Omega), \mathbf{P}([X = x_i]) = p_{i\bullet} = \sum_{y_j \in Y(\Omega)} p_{i,j}$

et  $\forall y_j \in Y(\Omega), \mathbf{P}([Y = y_j]) = p_{\bullet j} = \sum_{x_i \in X(\Omega)} p_{i,j}$ . **D** **Lois conds**  $\mathbf{P}_{[X=x_i]} : Y(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ , déf. par  $\forall y_j \in Y(\Omega), \mathbf{P}_{[X=x_i]}([Y = y_j]) = \frac{p_{i,j}}{p_{i\bullet}}$  et  $\mathbf{P}_{[Y=y_j]} : X(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ ,

déf par  $\forall x_i \in X(\Omega), \mathbf{P}_{[Y=y_j]}([X = x_i]) = \frac{p_{i,j}}{p_{\bullet j}}$ . **T** **de transfert** Soit  $\varphi$  définie sur  $\mathcal{D} \supset X(\Omega) \times Y(\Omega)$ ,  $\mathbf{E}(\varphi(X, Y)) = \sum_{(x_i, y_j) \in (X, Y)(\Omega)} h(x_i, y_j) \mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j])$

srca. **Vecteurs discrets** **D** **Loi d'un vecteur de dim n** Soit  $V = (X_1, \dots, X_n)$   $P_V : X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ , définie par  $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n X_k(\Omega)$ ,

$P_V(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i = x_i]\right)$ . **D** **Lois marginales**  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P_{X_k} : X_k(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ , déf par  $\forall x_k \in X_k(\Omega), P_{X_k}(x_k) = \mathbf{P}([X_k = x_k])$ . **T**  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$\forall x_k \in X_k(\Omega), \mathbf{P}([X_k = x_k]) = \sum_{(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \in \prod_{m \in \llbracket 1, n \rrbracket - \{k\}} X_m(\Omega)} \mathbf{P}\left(\bigcap_{j=1}^n [X_j = x_j]\right)$ .

**Covariance** **D** **©** **©** Soit  $X, Y \in \mathcal{L}^2, \text{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))(Y - \mathbf{E}(Y)))$ .

**P** **©** **©** :  $\text{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$ . **©** **©** :  $\text{Cov}(X, X) = \mathbf{V}(X)$ . **©** **©** :  $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$ . **©** **©** :  $\text{Cov}(aX + b, cY + d) = ac \text{Cov}(X, Y)$ . **©** **©** : Les  $X_k$

et  $Y_l \in \mathcal{L}_d^2, \lambda_k$  et  $\mu_l \in \mathbb{R}, \text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i, \sum_{j=1}^m \mu_j Y_j\right) = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, m \rrbracket} \lambda_i \mu_j \text{Cov}(X_i, Y_j)$ .

**T** **©** **©** :  $\forall k, X_k \in \mathcal{L}^2, \mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \mathbf{V}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \text{Cov}(X_i, X_j)$ .

**D** **©** **©** : Soit  $X, Y \in \mathcal{L}^2 \not\vdash \delta^1 : \rho(X, Y) \equiv \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbf{V}(X)\mathbf{V}(Y)}}$ . **P** **©** **©** : Soit

$X, Y \in \mathcal{L}^2 \not\vdash \delta : |\rho(X, Y)| \leq 1$ . **©** **©** :  $|\rho(X, Y)| = 1 \Leftrightarrow Y = aX + b$  ps. **D**

**Matrice de cov-var** **©** **©** : Les  $X_k \in \mathcal{L}_d^2, S = (\text{Cov}(X_i, X_j))_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . **T**

**©** **©** :  $\mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = {}^t (a_1 \dots a_n) S \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ . **Indépendance** **D** **©** :  $X_1 \perp$

<sup>1</sup>Cela veut dire de variances non nulles.

...  $\perp X_n \in \mathcal{L}^1 \iff \forall (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n X_i(\Omega), \mathbf{P} \left( \bigcap_{i=1}^n [X_i = x_i] \right) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}([X_i = x_i]).$

© :  $X_1 \perp \dots \perp X_n \iff \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n, \mathbf{P} \left( \bigcap_{i=1}^n [X_i \leq x_i] \right) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}([X_i \leq x_i]).$  [T]

©© :  $X \perp Y \Rightarrow \forall (\varphi, \psi), \varphi(X) \perp \psi(Y).$  ©© :  $X_1 \perp \dots \perp X_n \Rightarrow \mathbf{E} \left( \prod_{i=1}^n X_i \right) =$

$\prod_{i=1}^n \mathbf{E}(X_i).$  ©© :  $X \perp Y \Rightarrow \text{Cov}(X, Y) = 0.$  ©© :  $X \perp Y \Rightarrow \rho(X, Y) = 0.$

© :  $X \perp Y \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{E}(X | [Y = y_j]) = \mathbf{E}(X) \\ \mathbf{E}(Y | [X = x_i]) = \mathbf{E}(Y) \end{cases}$  ©© :  $X_1 \perp \dots \perp X_n \Rightarrow \mathbf{V} \left( \sum_{i=1}^n a_i X_i \right) =$

$\sum_{i=1}^n a_i^2 \mathbf{V}(X_i).$  ©© : **Lemme des coalitions**  $X_1 \perp \dots \perp X_{n+m} \Rightarrow \forall (\varphi, \psi),$

$\varphi(X_1, \dots, X_n) \perp \psi(X_{n+1}, \dots, X_{n+m})$  (on peut "bordéliser"). [T] **de convolution**

$X \perp Y \Rightarrow f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t) f_Y(t) dt, f_{X+Y}$  est  $\mathcal{C}^0$  presque partout.

**INEGALITES PROBABILISTES**

[T] **MARKOV** ©© : Soit  $X \in \mathcal{L}^1$  à valeurs positives, alors  $\forall \varepsilon > 0, \mathbf{P}([X \geq \varepsilon]) \leq \frac{\mathbf{E}(X)}{\varepsilon}.$  Ce qui se généralise pour  $X \in \mathcal{L}^r$  en

$\forall r > 0, \forall \varepsilon > 0, \mathbf{P}([|X| \geq \varepsilon]) \leq \frac{\mathbf{E}(|X|^r)}{\varepsilon^r}.$  [T] **IBT** ©© : Soit  $X \in \mathcal{L}^2$  admettant variance non nulle  $V(X).$  Alors  $\forall \varepsilon > 0, \mathbf{P}([|X - \mathbf{E}(X)| \geq \varepsilon]) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$

**CONVERGENCES**

[D] **Convergence en probabilité** [D]  $(X_n)_{n \in \mathbf{N}} \xrightarrow{P} X$  lorsque  $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}([|X_n - X| \geq \varepsilon]) = 0$  ou  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}([|X_n - X| < \varepsilon]) = 1.$  [P]

©© :  $(X_n)_{n \in \mathbf{N}} \xrightarrow{P} X \iff (X_n - X)_{n \in \mathbf{N}} \xrightarrow{P} 0.$  ©© :  $(X_n)_{n \in \mathbf{N}} \xrightarrow{P} X \not\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}(X_n) =$

$\mathbf{E}(X)$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{V}(X_n - X) = 0.$  [T]  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}(X_n) = a \in \mathbf{R}$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{V}(X_n) =$

$0 \Rightarrow (X_n)_{n \in \mathbf{N}^*} \xrightarrow{P} a.$  [P] (pas vraiment au pgme mais ...) ©© :  $(|X_n|)_{n \in \mathbf{N}} \xrightarrow{P} 0 \iff (X_n)_{n \in \mathbf{N}} \xrightarrow{P} 0.$  ©© :  $(X_n)_{n \in \mathbf{N}} \xrightarrow{P} X$  et  $(X_n)_{n \in \mathbf{N}} \xrightarrow{P} Y \Rightarrow X = Y$  ps.

©© : Si  $(X_n)_{n \in \mathbf{N}} \xrightarrow{P} X$  et si  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R})$  alors  $(f(X_n))_{n \in \mathbf{N}} \xrightarrow{P} f(X).$  ©© : Si  $(X_n)_{n \in \mathbf{N}} \xrightarrow{P} X$  et  $(Y_n)_{n \in \mathbf{N}} \xrightarrow{P} Y$  alors  $\forall (a, b) \in \mathbf{R}^2, (aX_n + bY_n)_{n \in \mathbf{N}} \xrightarrow{P} aX + bY ;$

$(X_n Y_n)_{n \in \mathbf{N}} \xrightarrow{P} XY ; \left( \frac{X_n}{Y_n} \right)_{n \in \mathbf{N}} \xrightarrow{P} \frac{X}{Y}$  avec  $\mathbf{P}([Y = 0]) = 0.$  [T] **Loi faible des grands nbs** ©© :  $(X_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$  2 à 2 indtes et de même loi d'esp. commune  $m$  et de variance commune  $\sigma^2.$  Soit  $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$  alors  $(\bar{X}_n)_{n \in \mathbf{N}^*} \xrightarrow{P} m.$  © : Si  $\forall k, X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p) : \forall \varepsilon > 0,$

$\mathbf{P}([|F_n - p| \geq \varepsilon]) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$  en notant  $F_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}.$  [D] **Convergence en loi**

[D]  $(X_n)_{n \in \mathbf{N}} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$  lorsque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$  en tout point où  $F_X$  est  $\mathcal{C}^0.$  [T]

©© :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}([a < X_n \leq b]) = \mathbf{P}([a < X \leq b]).$  [T] © :  $(X_n)_{n \in \mathbf{N}} \xrightarrow{\mathcal{L}} X \iff \forall n \in \mathbf{N},$

$X_n(\Omega) \subset X(\Omega)$  et  $\forall k \in \mathbf{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}([X_n = x_k]) = \mathbf{P}([X = x_k]).$  [T] **TCL** ©© : Soit  $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  iid alors  $(S_n^*)_{n \in \mathbf{N}^*} \xrightarrow{\mathcal{L}} N$  où  $N \hookrightarrow N(0, 1)$  où  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k,$  et  $S_n^* = \frac{S_n - \mathbf{E}(S_n)}{\sigma(S_n)}.$

Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}([S_n \leq x]) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt.$  Le TCL existe aussi en version moyenne.

[T] ©© :  $\forall a \in \mathbf{R}, (X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} a \Rightarrow (X_n) \xrightarrow{P} a.$  [Approximations] [T] **(hyper par bin)**  $\forall k \in \mathbf{N}, X_k \hookrightarrow \mathcal{H}(N_k, n, p)$  où  $n \in \mathbf{N}$  et  $p \in ]0, 1[$  fixés. Supposons que  $\forall k \in \mathbf{N},$

$pN_k$  et  $N_k(1-p) \in \mathbf{N}$  et  $\lim_{k \rightarrow +\infty} N_k = +\infty$  alors  $(X_k)_{k \in \mathbf{N}} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$  où  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$

(condition :  $N \geq 10n$ ). [T] **(bin par Pois)**  $\forall n \in \mathbf{N}, X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$  avec  $\lim_{n \rightarrow +\infty} np_n = \lambda,$

$\lambda > 0,$  alors  $(X_n)_{n \in \mathbf{N}} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$  où  $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$  (condition :  $n \geq 30, p \leq 0, 1$ ). [T] **(bin par norm)**  $\forall n \in \mathbf{N}^*, X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p),$  ainsi  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p).$  Alors  $(S_n^*)_{n \in \mathbf{N}^*} \xrightarrow{\mathcal{L}} N$

où  $N \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$  avec  $\forall n \in \mathbf{N}^*, S_n^* = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} (condition : n \geq 30, np \geq 5 et nq \geq 5).$

[T] **(Pois par norm)**  $\forall n \in \mathbf{N}, X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$  avec  $\lim_{n \rightarrow +\infty} np_n = \lambda, \lambda > 0,$  alors

$(X_n)_{n \in \mathbf{N}} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$  où  $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$  (condition :  $\lambda \geq 15$ ).

**ESTIMATIONS**

[D] **Estimation ponctuelle** [D] Soit  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  un  $n$ -éché d'une var  $X$  iid, on appelle statistique ou estimateur toute suite de variables  $(T_n)_n$  où  $\forall n, T_n = \varphi_n(X_1, X_2, \dots, X_n),$  fonction de  $X_1, X_2, \dots, X_n.$  C'est une variable aléatoire.

[D] **Moyenne empirique** [D] ©© :  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$  où le  $n$ -éché est tq  $\forall k, \mathbf{E}(X_k) = \mu$  in-

connue. [T] ©© :  $\mathbf{E}(\bar{X}_n) = \mu$  et  $\mathbf{V}(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}.$  [T] © :  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, X_k \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow$

$\bar{X}_n \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n}).$  ©© :  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, X_k \not\hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  voire de loi commune ??  $\Rightarrow \bar{X}_n \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$  par le TCL pour  $n$  grand. [D] **Fréquence empirique** [D] © :  $F_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$

où le  $n$ -éché est tq  $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$  où  $p$  est inconnu. [T]  $\mathbf{E}(F_n) = p$  et  $\mathbf{V}(F_n) = \frac{pq}{n}.$  [T] © :  $\bar{X}_n \hookrightarrow \mathcal{N}(p, \frac{pq}{n})$  par le TCL pour  $n$  grand,  $np > 5$  et  $nq > 5.$  [D] **Variance empirique**

[D] ©© :  $S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X}_n)^2$  où le  $n$ -éché est tq  $\forall k, \mathbf{E}(X_k) = m$  connue et

$\mathbf{V}(X_k) = \sigma^2$  inconnue. [T] ©© :  $S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^2 - (\bar{X}_n)^2$  [T] ©© :  $\mathbf{E}(S_n^2) = \left(\frac{n-1}{n}\right) \sigma^2.$

[D]  $(T_n)_n$  est convergent ou consistant pour  $\theta$  lorsque  $(T_n)_n \xrightarrow{P} \theta.$  [D] Biais d'un estimateur par rapport à  $\theta : B(T_n, \theta) = \mathbf{E}(T_n - \theta).$  Si  $B(T_n, \theta) = 0,$  on dit que l'estimateur

est sans biais. Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} B(T_n, \theta) = 0$ , on dit que l'estimateur est asymptotiquement sans biais. **T** **SC** : Si  $B(T_n, \theta) = 0$  soit si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} B(T_n, \theta) = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{V}(T_n) = 0$  alors

$(T_n)$  est convergent. **T** **Estimateurs de paramètres usuelles sans biais et cv** :  $(\bar{X}_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} \mu$ ,  $(F_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} p$ ,  $(\frac{n}{n-1} S_n^2) \xrightarrow{\mathbf{P}} \sigma^2$ . **D** On appelle erreur quadratique de  $T_n$

par rapport à  $\theta$  (ou risque quadratique de  $T_n$ )  $EQ(T_n, \theta) = E((T_n - \theta)^2)$ . **T** **SC** :

$EQ(T_n, \theta) = \mathbf{V}(T_n) + (B(T_n, \theta))^2$ . **T** **SC** :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} EQ(T_n, \theta) = 0 \Rightarrow (T_n)_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \theta$ .

**Estimation par IC** **D** L'intervalle aléatoire  $[U_n, V_n]$  est un intervalle de confiance de  $\theta$  au niveau  $1 - \alpha$  si  $\mathbf{P}([U_n \leq \theta \leq V_n]) \geq 1 - \alpha$  ( $\alpha$  est appelé le risque). **T**  $IC_\alpha(p) = \left[ F_n - \frac{t}{2\sqrt{n}} ; F_n + \frac{t}{2\sqrt{n}} \right]$  ou  $IC_\alpha(p) = \left[ F_n - t\sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}} ; F_n + t\sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}} \right]$

(condition  $\min(nu_n, nv_n, n(1-u_n), n(1-v_n)) \geq 5$ ). **T** **SC** :  $IC_\alpha(\mu) = \left[ \bar{X}_n - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{X}_n + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$  (condition  $n \geq 30$ ). Si  $\sigma$  est inconnu, l'estimer par la réalisation de  $\sqrt{\frac{n}{n-1}} S_n$  noté  $s$  ce qui donne :  $IC_\alpha(\mu) = \left[ \bar{X}_n - t\frac{s}{\sqrt{n}} ; \bar{X}_n + t\frac{s}{\sqrt{n}} \right]$ .

**D** Définition

**T** Théorème

**P** Propriété (s)

src : sous réserve de convergence

srca : sous réserve de convergence absolue

$A \perp B$  :  $A$  et  $B$  indépendants

$X \perp Y$  :  $X$  et  $Y$  indépendantes

$X_1 \perp \dots \perp X_n$  :  $X_1, \dots, X_n$  mutuellement indépendantes