Ce fichier est extrait du document 395

Programme de mathématiques en classe préparatoire économique et commerciale 1ère et 2ème année Voie E

Type : Programmes, B.O.
Classe(s) : CPGE ECE 1, CPGE ECE 2
Matières : Mathématiques
Mots clés : programme, BO, CPGE, ECE

L'auteur **pinel** précise :
Bulletin Officiel Hors série N° 5 du 28 Août 2003 et Hors-série n° 6 du 16 septembre 2004

Annexe 6

VOIE ÉCONOMIQUE ET COMMERCIALE OPTION ÉCONOMIQUE : PREMIÈRE ANNÉE

I – Algèbre et combinatoire

1) Mise en place de certaines méthodes de raisonnement et de notations utiles

Emploi du raisonnement par récurrence.

Tout exposé théorique sur le raisonnement par récurrence est exclu.
Les étudiants doivent pouvoir mener des raisonnements par récurrence sur une ou plusieurs générations et, après une certaine pratique, et avec des indications, mener un raisonnement par récurrence sur toutes les générations antérieures (récurrence forte).

Notations $\sum$, $\prod$.

Les étudiants doivent savoir employer les notations $\sum_{i=1}^{n} u_i$ et $\sum_{\alpha \in A} u_\alpha$ où A désigne un sous-ensemble fini de $\mathbf{N}$ ou de $\mathbf{N}^2$.

Somme des n premiers entiers naturels, des n premiers carrés, cubes.

2) Ensembles, applications

L'objectif est d'acquérir le vocabulaire élémentaire sur les ensembles et les applications, mais tout exposé théorique est exclu.

a) Ensembles, parties d'un ensemble
Appartenance. Inclusion. Ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E ; union, intersection, complémentaire.
Produit cartésien de deux ensembles.

b) Applications
Définition. Composée de deux applications.
Restriction et prolongement d'une application.
Équations. Applications injectives, surjectives, bijectives.

3) Combinatoire

L'objectif est d'apprendre à organiser quelques données combinatoires de base (listes, arrangements, permutations, combinaisons) et à exploiter les règles de dénombrement qui en résultent par l'étude d'exemples, issus notamment du calcul de probabilités.

Dénombrement des ensembles suivants :
- parties d'un ensemble à n éléments ;
- parties à p éléments d'un ensemble à n éléments ;

notation $\binom{n}{p}$; relation $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$,

formule $\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}$,

formule du binôme dans $\mathbf{R}$;

Exemples de problèmes de dénombrement issus du calcul des probabilités.

Illustration de la formule par le triangle de Pascal.

• p-listes d'un ensemble à n éléments ;
• p-listes d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments.
Nombre de permutations d'un ensemble à n éléments.

On pourra utiliser la représentation arborescente d'un ensemble de p-listes dans les problèmes de dénombrement.

II – Algèbre linéaire

L'objectif est triple :
– parvenir d'une part à une bonne maîtrise de la résolution des systèmes linéaires ;
– initier d'autre part au calcul matriciel, afin d'interpréter les systèmes linéaires et permettre la résolution de problèmes, issus notamment du calcul de probabilités ;
– introduire la notion d'espace vectoriel et initier à des méthodes de raisonnement qui seront approfondies en seconde année.

1) Systèmes linéaires

Définition d'un système linéaire.

Système homogène, système de Cramer.
Résolution par la méthode du pivot de Gauss.

On codera les opérations élémentaires sur les lignes de la façon suivante : $L_i \leftarrow L_i + bL_j$, $L_i \leftarrow aL_i$ avec $(a \neq 0)$, $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow aL_i + bL_j$ avec $(a \neq 0)$.
Pour les systèmes homogènes, on montrera au travers d'exemples que l'ensemble des solutions est stable par combinaison linéaire et on s'exercera à en trouver une famille génératrice.

2) Calcul matriciel

a) Définition d'une matrice réelle à n lignes et p colonnes. Ensemble $\mathbf{M}_{n,p}(\mathbf{R})$.
Matrices colonnes, matrices lignes.
Matrices carrées ; matrices triangulaires, diagonales, symétriques.

b) Opérations matricielles.
Somme, produit par un nombre réel, produit.
Transposée d'une matrice.
Propriétés des opérations.
Matrice identité.
Puissance d'une matrice.
Matrices inversibles.
Application de la méthode du pivot à la caractérisation des matrices inversibles et au calcul de l'inverse.

Pour la transposée, seules les propriétés de linéarité sont à connaître.
On caractérisera les matrices symétriques à l'aide de la transposée.

Les étudiants devront connaître la formule du binôme pour deux matrices carrées A et B telles que
$AB = BA$.
Exemples de calcul des puissances n-ièmes d'une matrice et d'étude de suites réelles satisfaisant à une relation de récurrence linéaire à coefficients constants.

c) Écriture matricielle $AX = B$ d'un système linéaire.
Interprétation matricielle des opérations élémentaires sur les lignes d'un système linéaire.

3) Espaces vectoriels et applications linéaires

Ce cours ne doit pas donner lieu à un exposé théorique, le but en est de donner une première approche des notions qui seront traitées en seconde année. Pour simplifier ce premier contact, les vecteurs utilisés seront des vecteurs colonnes. On pourra aussi noter les éléments de $\mathbf{R}^n$ sous forme de vecteurs colonnes.

a) Notion d'espace vectoriel. Combinaison linéaire.	$\mathbb{M}_{2,1}(\mathbf{R}), \mathbb{M}_{3,1}(\mathbf{R}), \mathbb{M}_{4,1}(\mathbf{R})$ sont des espaces vectoriels et on travaillera uniquement dans le cadre de ces espaces vectoriels.
b) Base canonique.	Les bases canoniques des espaces vectoriels ci-dessus seront données de façon naturelle.
c) Sous-espace vectoriel. Sous-espace vectoriel engendré, notation $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$.	Exemple fondamental : ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à $2, 3, 4$ inconnues.
Base d'un sous-espace vectoriel.	$(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est une base du sous-espace vectoriel F de E si et seulement si tout vecteur de F se décompose sous forme d'une combinaison linéaire unique de $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$.
d) Applications linéaires de E dans F.	$E = \mathbb{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ et $F = \mathbb{M}_{p,1}(\mathbf{R})$ où $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ et $p \in \{1, 2, 3, 4\}$.
Propriétés des applications f de E dans F définies par $X \mapsto MX$, M étant une matrice à p lignes et n colonnes Toute application linéaire f de E dans F est de la forme $f: \quad X \mapsto MX$.	
Noyau d'une application linéaire.	Le noyau est un sous-espace vectoriel de E. Lien entre recherche du noyau et résolution d'un système homogène.
Image d'une application linéaire.	L'image est un sous-espace vectoriel de F. $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ où $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est la base canonique de E. Lien entre recherche de l'image et résolution de système.

III – Fonctions de deux variables

Ce court chapitre, qui sera entièrement repris et complété en deuxième année, ne soulèvera aucune difficulté théorique. Il a pour objectif de familiariser les élèves avec les outils mathématiques utilisés en économie : modélisations à l'aide de variables, étude de variations à l'aide des dérivées partielles.
Les activités de ce chapitre pourront être menées en liaison avec le cours de micro-économie.

Exemples de fonctions de deux variables.	
Ensemble de définition d'une fonction de deux variables.	Cette activité est l'occasion de revoir l'interprétation graphique de certaines inégalités dans le plan $\mathbf{R}^2$.
Exemples de lignes de niveau pour des fonctions simples.	On commentera le principe des représentations graphiques pour les fonctions de deux variables. On illustrera les exemples en utilisant les logiciels graphiques.
Notations et calcul pratique des dérivées partielles d'une fonction de deux variables.	Seule la pratique des calculs est un objectif. On en commentera l'utilité sur des exemples tirés de l'économie.

Le B.O. N°5 28 AOÛT 2003 HORS-SÉRIE

IV – Notions élémentaires sur les suites et les séries

1) Suites arithmétiques, géométriques

Suite arithmétique ($u_{n+1} = r + u_n$).
Suite géométrique ($u_{n+1} = qu_n$).
Suite arithmético-géométrique
$(u_{n+1} = au_n + b)$.
Suite vérifiant une relation linéaire de récurrence d'ordre 2 ($u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ lorsque $a^2 + 4b \geqslant 0$).

Les élèves doivent connaître la formule donnant la somme des n premiers termes de la suite (q^k). Ils doivent savoir calculer des sommes portant sur les suites arithmétiques et géométriques.

2) Convergence d'une suite réelle

Aucune démonstration concernant les résultats de ce paragraphe n'est exigible.

Limite d'une suite, définition des suites convergentes.

Si $\lim_{n\to\infty} u_n = a$ et $b < a < c$, alors $b < u_n < c$ à partir d'un certain rang.

Opérations algébriques sur les suites convergentes. Compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre. Existence d'une limite par encadrement.

Si f est une fonction définie sur un intervalle I admettant une limite b en un point a, et si (u_n) est une suite d'éléments de I convergeant vers a, alors la suite $(f(u_n))$ converge vers b.
Convergence des suites monotones.
Suites adjacentes.

On étudiera des suites récurrentes du type
$u_{n+1} = f(u_n)$
Cette activité sera reprise et consolidée en deuxième année quand les outils d'analyse seront assimilés.

Suite négligeable devant une suite, suites équivalentes ; notations $u_n = o(v_n)$ et $u_n \sim v_n$.

On pratiquera des études du comportement asymptotique de suites.

3) Séries numériques (à termes réels)

Définition de la convergence.
Combinaison linéaire de séries convergentes.

L'étude de la convergence des séries à termes positifs par des critères de comparaison sera faite en seconde année.
On pratiquera des exemples simples d'étude de séries (convergence, calcul exact ou approché de la somme).

Étude des séries suivantes
$\sum q^n$, $\sum nq^{n-1}$ et $\sum n(n-1)q^{n-2}$
et calcul de leur somme.

Convergence et somme de la série exponentielle $\sum \frac{x^n}{n!}$.

Résultats admis.

Définition de la convergence absolue.

En première année, cette notion est abordée uniquement pour permettre une définition de l'espérance d'une variable aléatoire discrète.

La convergence absolue implique la convergence.

Résultat admis

V – Fonctions réelles d'une variable réelle

En analyse, on évitera la recherche d'hypothèses minimales, tant dans les théorèmes que dans les exercices et problèmes, préférant des méthodes efficaces pour un ensemble assez large de fonctions usuelles.
Pour les résultats du cours, on se limite aux fonctions définies sur un intervalle de **R** *; les candidats doivent savoir étudier les situations qui s'y ramènent simplement.*
Le champ des fonctions étudiées se limite aux fonctions usuelles et à celles qui s'en déduisent de façon simple.
L'analyse reposant largement sur la pratique des inégalités, on s'assurera que celle-ci est acquise à l'occasion d'exercices.
Aucune démonstration concernant ce paragraphe n'est exigible.

1) Limite et continuité d'une fonction en un point

Définition de la limite d'une fonction en un point et de la continuité en un point. Limite à gauche, limite à droite. Extension au cas où la fonction est définie sur un intervalle privé d'un point
Extension de la notion de limite aux cas $x_0 = +\infty$, $x_0 = -\infty$ et aux cas des limites infinies.
Opérations algébriques sur les limites. Compatibilité du passage à la limite avec les relations d'ordre. Existence d'une limite par encadrement. Limite d'une fonction composée.

On adoptera la définition suivante : f étant une fonction définie sur un intervalle I, x_0 étant un élément de I ou une extrémité de I, et a un élément de **R**, on dit que f admet a pour limite en x_0 si, pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que pour tout élément x de $I \cap [x_0-\alpha, x_0+\alpha]$, $|f(x) - a| \leqslant \varepsilon$; par suite, lorsque x_0 appartient à I, cela signifie que f est continue au point x_0 et, dans le cas contraire, que f se prolonge en une fonction continue au point x_0.

Comparaison des fonctions au voisinage d'un point ; fonction négligeable devant une fonction, fonctions équivalentes ; notation $f = o(g)$ et $f \sim g$. Comportement de l'équivalence vis à vis de certaines opérations (produit, quotient, élévation à la puissance). Comparaison des fonctions exponentielle, puissance et logarithme au voisinage de $+\infty$ et des fonctions puissance et logarithme au voisinage de 0.

2) Étude globale des fonctions

Fonctions paires, impaires ; fonctions périodiques.
Fonctions bornées.
Fonctions monotones. Existence de la limite d'une fonction monotone.

Fonctions continues ; opérations sur les fonctions continues, composée de deux fonctions continues.

L'image d'un intervalle (resp. un segment) est un intervalle (resp. un segment).
Pour une fonction continue sur $[a, b]$, notations
$$\max_{t\in[a,b]} f(t) \quad \text{et} \quad \min_{t\in[a,b]} f(t)$$

On illustrera ces résultats par des représentations graphiques et on montrera comment les mettre en évidence sur un tableau de variations.

Fonction strictement monotone et continue sur un intervalle. Caractère bijectif. Continuité et sens de variation de la fonction réciproque. Représentation graphique de la fonction réciproque.

On utilisera ce résultat pour résoudre des équations du type $f(x) = k$.
En liaison avec l'informatique, méthode de dichotomie.

Étude du comportement asymptotique de fonctions.

Recherche de la nature de branches infinies : vocabulaire, méthodes d'identification.

Asymptotes parallèles aux axes, directions asymptotiques, branches paraboliques, droites asymptotes.

3) Fonctions usuelles

Il s'agit dans ce paragraphe de fournir aux étudiants un ensemble de résultats de référence sur les fonctions usuelles. Ils pourront mémoriser ces résultats grâce aux représentations graphiques qui en constituent une synthèse.
Les fonctions trigonométriques sont hors programme.

a) Fonctions polynômes
Trinômes du second degré.
Factorisation par $(x-a)$ dans un polynôme ayant a comme racine.

On reviendra sur le calcul et les propriétés des racines du trinôme ainsi que sur son signe, en liaison avec les représentations graphiques.

Degré, somme et produit de polynômes.

En liaison avec les calculs algébriques (formule du binôme de Newton...)

b) Fonctions logarithmes et exponentielles ; fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha$.
Rappel des propriétés.
Traductions en termes d'équivalents des limites connues.

Les résultats sur ces fonctions sont connus depuis la classe terminale, mais seront consolidés.
Études de fonctions du type $u(x)^{v(x)}$.

c) Fonction partie entière
Définition ; notations $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ ou $x \mapsto \mathrm{Ent}(x)$.
Représentation graphique.

La notation E est réservée à l'espérance mathématique.

VI – Calcul différentiel et intégral

Le but de ce chapitre est de mettre en place les méthodes courantes de travail sur les fonctions. On effectuera les démonstrations qui semblent indispensables, mais aucune n'est imposée.

1) Dérivation

a) Dérivée en un point, développement limité à l'ordre 1 au voisinage d'un point. Tangente au graphe en un point. Dérivée à gauche, à droite. Fonction dérivée.

Notation f'.
Écriture différentielle $\mathrm{d}f = f'(x)\mathrm{d}x$

Opérations sur les dérivées ; linéarité, produit, quotient, fonctions puissances, fonctions composées, fonctions réciproques.
Fonctions de classe C^p, de classe C^∞ ; stabilité par rapport aux opérations précédentes.

Notation $f^{(p)}$.

b) Extremums locaux des fonctions dérivables.

Caractérisation des fonctions constantes et monotones par le signe de la dérivée.
Si $f' > 0$ sur l'intervalle I, alors f est strictement croissante sur I.

Résultat admis.

Inégalités des accroissements finis :
(1) Si $a \leqslant b$ et $m \leqslant f' \leqslant M$, alors
$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a).$$
(2) Si $|f'| \leqslant k$ sur un intervalle I alors
$$\forall (x_1, x_2) \in I^2 \quad |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant k|x_1 - x_2|.$$

Théorème du prolongement de la dérivée :
Si f continue sur $[a,b]$, de classe C^1 sur $]a,b]$, et si f' admet une limite finie au point a alors f est de classe C^1 sur $[a,b]$.

Brève extension au cas d'une limite infinie.

c) Convexité.

Fonctions convexes et fonctions concaves de classe C^1 sur un intervalle I ; interprétation graphique.

On définira la convexité par le fait que la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes en tout point de I.

Si f est de classe C^2 sur un intervalle et si f'' est positive, alors f est convexe.
Point d'inflexion.

Illustration graphique.

2) Intégration sur un segment

a) Aire sous la courbe d'une fonction positive.

Dans le cas où f est continue monotone, on constatera que cette fonction "aire sous la courbe" admet f pour dérivée.

Primitive d'une fonction continue sur un intervalle. Intégrale d'une fonction continue sur un segment $[a, b]$. Relation de Chasles.

On admettra que toute fonction f continue sur $[a, b]$ admet, sur ce segment, au moins une primitive F. On en déduira la forme de toute autre primitive G. Le nombre réel $G(b)-G(a)$ est indépendant du choix de cette primitive ; on le note
$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$
et on l'appelle intégrale de f de a à b.

b) Linéarité et positivité de l'intégrale.
Si $a \leqslant b$,
$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t \leqslant (b-a)\max_{t\in[a,b]}|f(t)|.$$

On apprendra aux élèves à majorer et à minorer des intégrales, par utilisation des inégalités précédentes et par intégration d'inégalités.

c) Intégration par parties. Changement de variables.
Calcul de primitives.

Calculs divers d'intégrales.
Etudes de suites définies par une intégrale.
Etudes de fonctions définies par une intégrale.
Les changements de variables autres que affines seront précisés dans les exercices.

VII – Probabilités

1) Espaces probabilisés

L'objectif est de mettre en place un cadre dans lequel on puisse énoncer des résultats généraux et mener des calculs de probabilités sans difficulté théorique. C'est pourquoi le vocabulaire général des probabilités est adopté (en particulier le vocabulaire "espace probabilisé" et la notation $(\Omega, \mathcal{B}, P)$), mais aucune difficulté ne sera soulevée sur le cadre. Le vocabulaire sera introduit et commenté au fur et à mesure des besoins et ne peut faire l'objet d'un exposé général préliminaire.

a) Événements

Expérience aléatoire. Univers des résultats observables, événements, événements élémentaires, opérations sur les événements, événements incompatibles, systèmes complets d'événements.
Tribu ou σ-algèbre d'événements.

On dégagera ces concepts à partir de l'étude de quelques situations simples, et notamment de celles où l'ensemble Ω des résultats possibles est fini, et où $\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble des événements.
On fera le lien entre connecteurs logiques et opérations sur les événements.

b) Probabilité

Une probabilité est une application σ-additive, définie sur la tribu des événements, telle que $P(\Omega) = 1$.

On dégagera la définition d'une probabilité à partir du cas où Ω est fini, les probabilités des événements élémentaires étant connues.

Ensembles négligeables. Propriétés vraies presque sûrement.

Propriétés. On admettra en particulier :

- propriété de limite monotone :
- pour toute suite croissante (A_n) d'événements,
$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$$
- pour toute suite décroissante (A_n) d'événements,
$$P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$$

On donnera quelques exemples significatifs d'événements de la forme
$$A = \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \quad \text{et} \quad A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$$
et on déduira de la propriété de limite monotone que pour toute suite (A_n) d'événements,
$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)$$
$$P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)$$

- formule de Poincaré ou du crible.

On illustrera et on justifiera cette formule dans le cas de deux, trois ou quatre événements.
Dans le cas d'une utilisation générale, la formule devra être rappelée au candidat.

c) Probabilité conditionnelle
Définition et notation : $P_A(B)$.

La notation $P(B|A)$ sera citée mais non utilisée.

Formule des probabilités composées.

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)\, P_{A_1}(A_2) \ldots P_{A_1\cap A_2\cap\ldots A_{n-1}}(A_n)$$

Formule des probabilités totales.
Formule de Bayes.

On donnera de nombreux exemples d'utilisation de ces formules. En particulier on appliquera la formule des probabilités totales à l'étude de chaines de Markov simples.

d) Indépendance en probabilité d'événements
Indépendance de deux événements.
Indépendance mutuelle de n événements.
Si n événements A_i sont indépendants, il en est de même pour les événements B_i, avec $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$.
Indépendance d'une suite infinie d'événements.

Deux événements A et B de probabilités non nulles sont indépendants si : $P_A(B) = P(B)$.
Un événement de probabilité nulle est indépendant de tout autre événement.

2) Variables aléatoires discrètes

a) Définition d'une variable aléatoire discrète à valeurs dans **R**.

On considère des variables aléatoires dont l'ensemble des valeurs prises est indexé par **N**, **Z** ou leurs parties finies.
On commentera les notations des événements : $(X = x)$, $(X \leqslant x)$,...

La somme, le produit de variables aléatoires discrètes sont des variables aléatoires discrètes.
Loi de probabilité (ou distribution) d'une variable aléatoire.

Résultats admis.

Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète : $F(x) = P(X \leqslant x)$. Caractérisation de la loi d'une variable aléatoire discrète à l'aide de sa fonction de répartition.	On établira les propriétés usuelles de la fonction de répartition, et on insistera sur la relation $P(X = k) = F(k) - F(k-1)$ (dans le cas où X est à valeurs dans $\mathbf{N}$).
Variable aléatoire $Y = g(X)$, où g est définie sur l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X. Étude de la loi de $Y = g(X)$.	On se limite à des cas simples, tels que $g(x) = ax + b$, $g(x) = x^2$, ...
b) Espérance d'une variable aléatoire discrète.	
Définition de l'espérance, notation $E(X)$.	Une variable aléatoire discrète admet une espérance $E(X)$ si la série $\sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$ est absolument convergente.
Linéarité de l'espérance. Positivité.	La linéarité pourra être démontrée en deuxième année.
Variables centrées.	
Théorème du transfert : espérance d'une variable aléatoire $Y = g(X)$, où g est définie sur l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X. Cas où g est affine.	Dans le cas général, on admet que $E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$ (sous réserve d'existence).
Moment d'ordre r ($r \in \mathbf{N}$). Notation $m_r(X)$.	$m_r(X) = E(X^r)$
Variance, écart-type d'une variable aléatoire discrète. Variables centrées réduites.	On établit que $V(aX + b) = a^2 V(X)$.
c) Couples de variables discrètes.	
Loi conjointe d'un couple de variables discrètes. Indépendance de deux variables discrètes. Manipulations simultanées de deux variables discrètes, indépendantes ou non : • Utilisation de la formule des probabilités totales pour déterminer la loi de X quand on connaît la loi conjointe. • Exemples de détermination de la loi de $X + Y$, de la loi de $\max(X, Y)$ et $\min(X, Y)$ quand X et Y sont des variables indépendantes dont on connaît la loi.	L'étude systématique des couples (notion de covariance, de corrélation) sera faite en seconde année. Il est par contre essentiel que les élèves aient acquis les méthodes en jeu dans les activités décrites ci-contre.
3) Lois usuelles	
a) Lois discrètes finies	
Loi de Bernoulli ou indicatrice d'un événement.	En liaison avec l'informatique, on commencera à s'intéresser à la simulation des variables usuelles suivantes : loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binomiale.
Loi binomiale (ou des tirages avec remise) ; la somme de variables de Bernoulli indépendantes et de même espérance p suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Espérance, variance.	
Loi hypergéométrique (ou des tirages sans remise). Espérance.	La loi hypergéométrique pourra être l'occasion de manipuler des variables de Bernoulli non indépendantes.
Loi uniforme sur $[1, n] \cap \mathbf{N}$, espérance, variance.	Application, à l'étude de la loi uniforme sur $[a, b] \cap \mathbf{N}$, où $(a, b) \in \mathbf{N}^2$.

Le B.O. N°5 28 AOÛT 2003 HORS-SÉRIE

b) Lois discrètes infinies

Loi géométrique ou loi d'attente d'un premier succès dans un processus sans mémoire.
Espérance et variance.

La propriété caractéristique de la loi géométrique, temps d'attente discret, sera mise en évidence. Si cet événement a pour probabilité p, alors pour tout nombre entier naturel non nul k,
$$P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$$

Loi de Poisson : définition, espérance, variance.

On pourra, par des calculs, ou par des simulations informatiques, introduire la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ comme loi « limite » d'une suite de variables suivant la loi binomiale $B(n, \lambda/n)$ (cette notion sera précisée en deuxième année).

VIII – Éléments d'algorithmique

L'objectif est d'initier les étudiants à l'algorithmique au travers de thèmes empruntés au programme de mathématiques. Dès qu'un calcul numérique est envisagé, dès qu'un problème incite à tester expérimentalement un résultat, dès qu'une situation aléatoire peut être modélisée avec les outils informatiques, le recours à un algorithme est une démarche rendue naturelle et nécessaire grâce à la puissance et à la souplesse des nombreux outils logiciels disponibles.
Le langage retenu pour la programmation est un sous-ensemble du langage PASCAL, langage conçu dès son origine comme un outil d'enseignement et permettant une adaptation rapide à tous les environnements récents de programmation.
La mise en œuvre sur machine des algorithmes étudiés se fait dans le cadre horaire prévu (horaire d'interrogation orale), mais les études des algorithmes se font en continuité totale avec le cours de mathématiques.
Seules les notions de Pascal indiquées dans le programme sont exigibles.

L'environnement Pascal

Les étudiants devront savoir utiliser l'environnement de programmation Pascal : créer, modifier, sauvegarder et rappeler un fichier programme, le compiler et l'exécuter en mémoire.
Les seuls éléments exigibles du langage Pascal sont les suivants :

a) Variables et types
Les étudiants devront maîtriser la notion de variable au sens informatique (différence avec la notion mathématique), la notion de type et connaître les types suivants :
`integer`, `real`, `boolean`, `array`

b) Opérations élémentaires
Les opérations suivantes doivent être connues des étudiants :
Affectation (`:=`), conditions d'utilisation.
Comparaison (`=` , `>` , `<` , `>=` , `<=` , `<>`).
Opérations arithmétiques (`+` , `-` , `*` , `/`).
Opérations booléennes (`and` , `or` , `not`).

Pour commencer à évaluer les performances des algorithmes, on habituera les étudiants à dénombrer les opérations élémentaires mises en œuvre dans l'exécution d'un programme (ou d'une fonction ou d'une procédure).

c) Opérations et fonctions usuelles

Doivent être connus des étudiants :
la division entière (`div`) et le reste entier (`mod`),
les fonctions usuelles (`ln` , `exp` , `trunc` , `abs` , `sqrt`).

d) Structures de base

En plus de la connaissance de la structure générale d'un programme, les structures suivantes seront utilisées :
Structure séquentielle : instructions simples, instructions composées (`begin ...end`).
Structure conditionnelle : `if ...then ...[ else ...]`.
Structures répétitives : `for ...to ...do ...`, `for ...downto ...do ...`, `while ...do ... repeat ...until ....`

e) Procédures et fonctions

Déclaration de procédures et de fonctions, structure, passage de paramètres en valeur et en variable. Notion de variables locales et globales.
Les procédures d'entrée-sortie pour le clavier et l'écran sont `readln`, `write`, `writeln`.

Listes de savoir-faire exigibles en première année :

Calculs de sommes et de produits.	Exemples : calcul de $\sum_{k=1}^{n} k^4$ calcul de $\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{365}\right)$ calcul de $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{1}{(i+j)}$ (n étant une variable « entrée » par l'utilisateur).
Calculs des termes d'une suite récurrente.	On utilisera des suites récurrentes sur une ou plusieurs générations.
Calculs de valeurs approchées de la limite d'une suite.	On utilisera des structures répétitives et conditionnelles en exploitant l'étude mathématique.
Calculs de valeurs approchées de la limite de la somme d'une série.	Là encore, la détermination du rang d'arrêt du calcul résultera directement de l'étude mathématique ou d'un algorithme qui en découle.
Calcul approché de la racine d'une équation du type $f(x)=0$. Mise en œuvre de l'algorithme de dichotomie.	On utilisera différentes méthodes dont certaines résulteront d'une étude mathématique (suites récurrentes, encadrements, ...).
Écriture et utilisation de fonctions servant pour des dénombrements classiques : n^p, $n!$, $\binom{n}{p}$.	On montrera sur ces exemples le danger de l'utilisation de données de type `integer` (risque de débordement de l'intervalle de validité).

Calcul de la valeur d'un polynôme de haut degré. Principe et mise en œuvre de l'algorithme de Horner. Comparaison de l'efficacité de cet algorithme à ceux utilisant la puissance.

Exemples : calcul de $S_{1000}\left(\frac{1}{2}\right)$ pour $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$ ou $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.
On écrira des fonctions PASCAL dont l'intitulé sera du type :
`function eval_S(n :integer;x :real) :real;`

Utilisation du générateur aléatoire `random`, `random(n)` et de l'instruction `randomize` pour simuler des phénomènes aléatoires.
Ecriture de fonctions PASCAL simulant des variables aléatoires suivant une loi uniforme sur $[\![n_1, n_2]\!]$, une loi de Bernoulli de paramètre p et une loi binomiale de paramètres n et p.

On pourra utiliser une simulation pour comparer expérimentalement une loi binomiale de paramètres $(n, \frac{\lambda}{n})$ (n grand) avec la loi de Poisson.