Table des matières

Première partie
Enoncés

1 EML III 2007

Partie entière et partie décimale d'une variable exponentielle, loi géométrique sur $\mathbb{N}$, loi de Bernoulli, loi d'un produit de variables discrètes, espérance, variance.

1. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout nombre réel x par :
$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$
Montrer que f est une densité de probabilité.
On considère une variable aléatoire X admettant f pour densité.
2. On définit la variable aléatoire discrète Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ de la façon suivante :
   - l'événement $[Y = 0]$ est égal l'événement $[X < 1]$;
   - pour tout nombre entier strictement positif n, l'événement $[Y = n]$ est égal à l'événement $[n \leq X < n + 1]$.

   (a) Montrer, pour tout entier naturel n : $\mathbf{P}([Y = n]) = \left(1 - \frac{1}{e}\right) e^{-n}$.
   (b) Montrer que la variable aléatoire $Y + 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
   (c) En déduire l'espérance et la variance de Y.
3. Soit U une variable de Bernoulli telle que :
$$\mathbf{P}([U = 1]) = \mathbf{P}([U = 0]) = \frac{1}{2}$$
On suppose que les variables aléatoires U et Y sont indépendantes.
Soit la variable aléatoire $T = (2U - 1) Y$, produit des variables aléatoires $2U - 1$ et Y.
Ainsi, T est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{Z}$, l'ensemble des entiers relatifs.
   (a) Montrer que la variable aléatoire T admet une espérance $\mathbf{E}(T)$ et calculer $\mathbf{E}(T)$.
   (b) Vérifier que $T^2 = Y^2$. En déduire que la variable aléatoire T admet une variance $\mathbf{V}(T)$ et calculer $\mathbf{V}(T)$.
   (c) Pour tout nombre entier relatif n, calculer la probabilité $\mathbf{P}([T = n])$.
4. Soit la variable aléatoire $D = X - Y$. On note F_D la fonction de répartition de D.
   (a) Justifier :
$$\forall t \in]-\infty, 0[, \quad F_D(t) = 0 \quad \text{et} \quad \forall t \in [1, +\infty[, \quad F_D(t) = 1$$
   (b) Soit $t \in [0, 1[$. Exprimer l'événement $[D \leq t]$ à l'aide des événements $[n \leq X \leq n + t]$, $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Pour tout nombre réel $t \in [0, 1[$ et pour tout nombre entier naturel n, calculer la probabilité $\mathbf{P}([n \leq X \leq n + t])$.
   (d) Montrer :
$$\forall t \in [0, 1[, \quad F_D(t) = \frac{1 - e^{-t}}{1 - e^{-1}}$$
   (e) Montrer que D est une variable aléatoire à densité. Déterminer une densité de D.

2 EML III 2006

Loi normale, fonction de répartition d'une variable à densité, changement de variable à densité quadratique, espérance, variance, loi exponentielle, loi géométrique, moyenne de n variables géomériques, théorème de la limite centrée.

Partie A

1. Soit U une variable aléatoire à densité suivant une loi normale d'espérance nulle et de variance $\dfrac{1}{2}$.

   (a) Rappeler une densité de U.

   (b) En utilisant la définition de la variance de U, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx$ est convergente et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$.

2. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \forall x \leq 0, & F(x) = 0 \\ \forall x > 0, & F(x) = 1 - e^{-x^2} \end{cases}$$

   Montrer que la fonction F définit une fonction de répartition de variable aléatoire dont on déterminera une densité f.

3. Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité.

   (a) Montrer que X admet une espérance $\mathbf{E}(X)$ et que $\mathbf{E}(X) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

   (b) Déterminer, pour tout réel y, la probabilité $\mathbf{P}\left(\left[X^2 \leq y\right]\right)$. *On distinguera les cas $y \leq 0$ et $y > 0$.*

   (c) Montrer que la variable aléatoire X^2 suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre. En déduire que X admet une variance $\mathbf{V}(X)$ et calculer $\mathbf{V}(X)$.

Partie B

1. Soit Z une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}([Z = k]) = p(1-p)^{k-1}$.
   Rappeler la valeur de l'espérance $\mathbf{E}(Z)$ et celle de la variance $\mathbf{V}(Z)$ de la variable aléatoire Z.

2. Soient un entier n supérieur ou égal à 2, et n variables aléatoires indépendantes $Z_1, Z_2, ..., Z_n$, suivant toutes le loi géométrique de paramètre p. On considère la variable aléatoire $M_n = \dfrac{1}{n}(Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n)$.

   (a) Déterminer l'espérance m et l'écart-type σ_n de M_n.

   (b) Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}([0 \leq M_n - m \leq \sigma_n])$ existe et exprimer sa valeur à l'aide de $\displaystyle\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

3 EML III 1997

Lancers d'un dé équilibré, loi d'une variable discrète (dimension 1), espérance, variance, loi conditionnelle, loi d'un couple, indépendance.

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et d'une pièce truquée telle que la probabilité d'apparition de "pile" soit égale à p, $p \in]0,1[$. On pourra noter $q = 1 - p$.

Soit N un entier naturel non nul fixé. On effectue N lancers du dé ; si n est le nombre de "6" obtenus, on lance alors n fois la pièce.

On définit trois variables aléatoires X, Y, Z de la manière suivante :
- Z indique le nombre de "6" obtenus aux lancers du dé ;
- X indique le nombre de "piles" obtenus aux lancers de la pièce ;
- Y indique le nombre de "faces" obtenus aux lancers de la pièce.

Ainsi $X + Y = Z$ et, si Z prend la valeur 0, alors X et Y prennent la valeur 0.

1. Préciser la loi de Z, son espérance et sa variance.
2. Pour $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, déterminer la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_{[Z=n]}([X = k])$. On distinguera les cas $k \leq n$ et $k > n$.
3. Montrer, pour tout couple d'entiers naturels (k, n) :

$$\begin{array}{lll} \text{Si } 0 \leq k \leq n \leq N & \text{alors} & \mathbf{P}([X = k] \cap [Z = n]) = \binom{n}{k}\binom{N}{n} p^k (1-p)^{n-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^n \\ \text{Si } n > N \text{ ou } k > n & \text{alors} & \mathbf{P}([X = k] \cap [Z = n]) = 0 \end{array}$$

4. Calculer la probabilité $\mathbf{P}([X = 0])$.
5. Montrer pour tout couple d'entiers naturels (k, n) tel que $0 \leq k \leq n \leq N$:

$$\binom{n}{k}\binom{N}{n} = \binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k}$$

   En déduire la loi de X.
6. Montrer que la variable X suit une loi binomiale de paramètres $\left(N, \frac{p}{6}\right)$.
   Quelle est la loi de la variable Y ?
7. Est-ce que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes ? Déterminer la loi du couple (X, Y).

4 ESCP III 2003

Suite infinie de tirages dans une urne à contenu variable, suite géométrique, probabilité conditionnelle, suite récurrente d'ordre deux à coefficients variables.

Soit a, b deux entiers naturels non nuls et s leur somme.
Une urne contient initialement a boules noires et b boules blanches indiscernables au toucher.
On effectue dans cette urne une suite infinie de tirages au hasard d'une boule selon le protocole suivant :

- Si la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne ;
- Si la boule tirée est noire, elle est remplacée dans l'urne par une boule blanche prise dans une réserve annexe.
  Avant chaque tirage, l'urne contient donc toujours s boules.
  On désigne par $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé qui modélise cette expérience et, pour tout entier naturel n non nul, on note :
- B_n l'événement "la n-ième boule tirée est blanche" ;
- X_n la variable aléatoire désignant le nombre de boules blanches tirées au cours des n premiers tirages ;
- u_n l'espérance de la variable aléatoire X_n, c'est-à-dire $u_n = \mathbf{E}(X_n)$.

1. **Étude d'un ensemble de suites**
   Soit A l'ensemble des suites $(x_n)_{n\geq 1}$ de réels qui vérifient :
   $$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad s\, x_{n+1} = (s-1)\, x_n + b + n$$
   (a) Soit α et β deux réels et $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par :
   $$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad v_n = \alpha\, n + \beta$$
   Déterminer en fonction de b et de s les valeurs de α et β pour que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ appartienne à A.
   (b) Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite appartenant à A, $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite déterminée à la question précédente et $(y_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par :
   $$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad y_n = x_n - v_n$$
   Montrer que la suite $(y_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique et expliciter, pour tout entier naturel n non nul, y_n puis x_n en fonction de x_1, b, s et n.

2. **Expression de la probabilité $\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{B_{n+1}}\right)$ à l'aide de $\boldsymbol{u_n}$**
   (a) Donner, en fonction de b et de s, les valeurs respectives de la probabilité $\mathbf{P}(B_1)$ et du nombre u_1.
   (b) Calculer la probabilité $\mathbf{P}(B_2)$ et vérifier l'égalité $\mathbf{P}(B_2) = \dfrac{b+1-u_1}{s}$.
   (c) Soit n un entier naturel vérifiant $1 \leq n \leq a$. Montrer que, pour tout entier k de l'intervalle $[\![0, n]\!]$, la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_{[X_n=k]}\left(B_{n+1}\right)$ est égale à $\dfrac{b+n-k}{s}$.
   En déduire l'égalité $\mathbf{P}(B_{n+1}) = \dfrac{b+n-u_n}{s}$.
   (d) Soit n un entier naturel vérifiant $n > a$.
   Si k est un entier de l'intervalle $[\![0, n-a-1]\!]$, quel est l'événement $[X_n = k]$?
   Si k est un entier de l'intervalle $[\![n-a, n]\!]$, justifier l'égalité $\mathbf{P}_{[X_n=k]}(B_{n+1}) = \dfrac{b+n-k}{s}$.
   Montrer enfin que l'égalité $\mathbf{P}(B_{n+1}) = \dfrac{b+n-u_n}{s}$ est encore vérifiée.

3. **Calcul des nombres $\boldsymbol{u_n}$ et $\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{B_n}\right)$**

(a) Soit n un entier naturel non nul. Établir, pour tout entier k de l'intervalle $[\![n+1-a, n]\!]$, l'égalité :

$$\mathbf{P}([X_{n+1} = k]) = \frac{a-n+k}{s}\,\mathbf{P}([X_n = k]) + \frac{b+n-k+1}{s}\,\mathbf{P}([X_n = k-1])$$

Vérifier cette égalité pour $k = n+1,\ k = n-a$ et pour tout entier k de l'intervalle $[\![1, n-a-1]\!]$.

(b) Calculer, pour tout entier naturel n non nul, u_{n+1} en fonction de u_n et de n. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ appartient à l'ensemble A étudié dans la **question** 1.

(c) Donner, pour tout entier naturel n non nul, les valeurs de u_n et de $\mathbf{P}(B_{n+1})$ en fonction de b, s et n.

(d) Quelles sont les limites des suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\mathbf{P}(B_n))_{n\geq 1}$?

5 ESCP III 2001

Probabilités discrètes dans une urne contient N boules dont $N-2$ sont blanches et 2 sont noires. Etude des variables aléatoires égale aux rang d'apparition des deux boules noires dans un tirage sans remise. Somme des cubes, espace probabilisé, loi d'un couple, lois marginales, comparaison de lois, espérance, variance, covariance, loi uniforme discrète, min, max, probabilité conditionnelle.

Préliminaire

Montrer, pour tout entier naturel non nul n, l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Soit N un entier supérieur ou égal à 2.

Une urne contient N boules dont $N-2$ sont blanches et 2 sont noires. On tire au hasard, successivement et **sans remise**, les N boules de cette urne.

Les tirages étant numérotés de 1 à N, on note X_1 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la premiére fois, une boule noire et X_2 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la deuxiéme fois, une boule noire.

1. Préciser l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ que l'on peut utiliser pour modéliser cette expérience aléaoire.
2. Soit i et j deux entiers de l'intervale $[\![1, N]\!]$. Montrer que l'on a :

$$\mathbf{P}\left([X_1 = i,\ X_2 = j]\right) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 1 \leq j \leq i \leq N \\ \dfrac{2}{N(N-1)} & \text{si} \quad 1 \leq i < j \leq N \end{cases}$$

3. Déterminer les lois de probabilité des variables X_1 et X_2. Ces variables sont-elles indépendantes ?
4. (a) Démontrer que la variable $N+1-X_2$ a même loi que X_1.
   (b) Déterminer la loi de la variable $X_2 - X_1$ et la comparer à celle de X_1.
5. À l'aide des résultats de la **question 4** :
   (a) Calculer les espérances $\mathbf{E}(X_1)$ et $\mathbf{E}(X_2)$.
   (b) Montrer l'égalité des variances $\mathbf{V}(X_1)$ et $\mathbf{V}(X_2)$.
   (c) Établir la relation : $2\,\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \mathbf{V}(X_1)$ où $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$ désigne la covariance des variables X_1 et X_2.
6. Calculer $\mathbf{V}(X_1)$; en déduire $\mathbf{V}(X_2)$ et $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.

Dans cette drnière partie, N désigne encore un entier supérieur ou égal à deux.

7. On suppose que A et B sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes, suivant la même loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, \ldots, N)$ et on désigne par D l'événement : "A ne prend pas la même valeur que B".
   (a) Montrer que la probabilité de l'événement D est $\dfrac{N-1}{N}$.
   (b) Soit Y_1 et Y_2 les variables aléatoires définies par :

$$\begin{cases} Y_1 = \min(A, B) \\ Y_2 = \max(A, B) \end{cases}$$

   Calculer, pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, 2, \ldots, N\}$, la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_D([Y_1 = i,\ Y_2 = j])$.

6 ESCP III 1999

Suite de variables de Bernoulli indépendantes, probabilité conditionnelle, loi d'un produit de variables de Bernoulli, covariance, indépendance, probabilité conditionnelle, espérance conditionnelle.

Une chaîne de fabrication produit des objets dont certains peuvent être défectueux. Pour modéliser ce processus on considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes, de paramètre p, $(0 < p < 1)$. La variable aléatoire X_n prend la valeur 1 si le $n^{ième}$ objet produit est défectueux et prend la valeur 0 s'il est de bonne qualité.

Pour contrôler la qualité des objets produits, on effectue des prélèvements aléatoires et on considère une suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes, de paramètre p', $(0 < p' < 1)$, telle que Y_n prend la valeur 1 si le $n^{\text{ième}}$ objet produit est contrôlé et 0 s'il ne l'est pas.

Toutes les variables aléatoires X_n et Y_n sont définies sur un même espace probabilisé Ω, muni d'une probabilité notée $\mathbf{P}$ et sont supposées toutes indépendantes entre elles.

La probabilité conditionnelle d'un événement A sachant un événement B est notée $\mathbf{P}_B(A)$
Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $Z_n = X_n Y_n$. La variable aléatoire Z_n ainsi définie vaut donc 1 si le $n^{\text{ième}}$ objet est à la fois défectueux et contrôlé et 0 sinon.

L'objet de l'exercice est d'étudier le nombre d'objets défectueux produits par la chaîne avant qu'un objet défectueux n'ait été détecté.

1. Déterminer, pour tout entier $n \geq 1$, la loi de la variable aléatoire Z_n et la covariance des variables X_n et Z_n. En déduire que les variables X_n et Z_n ne sont pas indépendantes.
   En revanche, il résulte des hypothèses (et on ne demande pas de le justifier) que, pour tout entier n, la variable aléatoire Z_n est indépendante des variables $(X_i, i \neq n)$ et des variables $(Y_i, i \neq n)$, de même que des variables $(Z_i, i \neq n)$.
2. Soit, pour tout entier $n \geq 1$, A_n l'événement : "le $n^{ième}$ objet fabriqué est le premier qui ait été contrôlé et trouvé défectueux".
   (a) Exprimer A_n à l'aide des variables aléatoires $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ et déterminer $\mathbf{P}(A_n)$.
   (b) Montrer qu'on finira, presque sûrement, par détecter un objet défectueux.
3. Soit un entier $n \geq 2$.
   (a) Pour tout entier k vérifiant $1 \leq k \leq n-1$, calculer la probabilité des événements $[X_k = 1] \cap A_n$ et $[X_k = 1] \cap [Z_k = 0]$.
   On note B_k l'événement $[Z_k = 0]$. Montrer l'égalité des probabilités conditionnelles
   $$\mathbf{P}_{A_n}([X_k = 1]) = \mathbf{P}_{B_k}([X_k = 1]) = \frac{p - pp'}{1 - pp'}$$
   (b) Montrer que si $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ est une suite quelconque de nombres égaux à 0 ou à 1, on a :
   $$\mathbf{P}_{A_n}([X_1 = x_1], [X_2 = x_2], \ldots, [X_{n-1} = x_{n-1}]) = \prod_{i=1}^{n-1} \mathbf{P}_{A_n}([X_i = x_i])$$
   (c) Soit $S_n = \sum_{j=1}^{n-1} X_j$ le nombre d'objets défectueux fabriqués avant le $n^{ième}$ objet et soit un entier m vérifiant $0 \leq m \leq n-1$. Calculer $\mathbf{P}_{A_n}([S_n = m])$.
   (d) Déterminer l'espérance de S_n pour la probabilité conditionnelle sachant A_n.

7 ESCP III 1998

Loi uniforme continue, espérance, variance, indépendance de variables, convergence en loi d'une suite de variables à densité.

Toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé, muni de la probabilité $\mathbf{P}$.

Pour tout entier $n \geq 1$, soit X_n une variable aléatoire réelle vérifiant $\mathbf{P}([X_n = k]) = \dfrac{1}{n}$ pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n-1$. On pose $Y_n = \dfrac{X_n}{n}$.

D'autre part, soit Z une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$.

1. (a) Déterminer l'espérance $\mathbf{E}(Z)$ et la variance $\mathbf{V}(Z)$ de la variable aléatoire Z.
   (b) Calculer, pour tout $n \geq 1$, l'espérance et la variance de Y_n.
   Déterminer les limites des suites $(\mathbf{E}(Y_n))_{n\geq 1}$ et $(\mathbf{V}(Y_n))_{n\geq 1}$.
   (c) Montrer que, pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, à valeurs réelles, strictement monotone, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{E}(f(Y_n)) = \mathbf{E}(f(Z))$.
2. Pour tout réel x on note $\lfloor x \rfloor$) la partie entière de x, c'est-à-dire le plus grand nombre entier relatif inférieur ou égal à x.
   (a) Montrer que, pour tout réel x, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$.
   (b) Soit a et b deux réels vérifiant $0 \leq a \leq b \leq 1$ et soit $I_n(a,b)$ le nombre d'entiers k vérifiant $a < \dfrac{k}{n} \leq b$. Montrer que $I_n(a,b) = \lfloor nb \rfloor - \lfloor na \rfloor$.
   (c) Montrer que, si $0 \leq a \leq b \leq 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(a < Y_n \leq b) = \mathbf{P}(a < Z \leq b)$.
3. Pour tout entier $n \geq 1$ on note Z_n la variable aléatoire $\dfrac{\lfloor n\,Z \rfloor}{n}$ et on pose $D_n = Z - Z_n$.
   (a) Montrer Z_n et Y_n ont même loi de probabilité.
   (b) Trouver la fonction de répartition et une densité de D_n.
   (c) Pour un entier k tel que $0 \leq k \leq n-1$ et un réel y tel que $0 \leq y \leq \dfrac{1}{n}$, exprimer à l'aide de la variable aléatoire Z l'événement $\{Z_n = \dfrac{k}{n}$ et $D_n \leq y\}$. En déduire la valeur de $\mathbf{P}\left(\left[Z_n = \dfrac{k}{n}\right] \cap [D_n \leq y]\right)$.
   (d) Montrer que les variables aléatoires Z_n et D_n sont indépendantes.

8 ESCP III 1997

Loi géométrique sur $\mathbb{N}$, min d'un couple, loi d'une somme de variables discrètes, loi conditionnelle, loi d'une différence, indépendance.

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels. Soit a et b deux réels tels que $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$.

On effectue une suite d'expériences aléatoires consistant à jeter simultanément deux pièces de monnaie notées A et B. On suppose que ces expériences sont indépendantes et qu'à chaque expérience les résultats des deux pièces sont indépendants. On suppose que, lors d'une expérience, la probabilité que la pièce A donne pile est a, et que la probabilité que la pièce B donne pile est b.

1. (a) Pour tout entier naturel n, calculer la probabilité μ_n que la pièce A donne n fois pile et, à la $(n+1)^{\text{ème}}$ expérience, face pour la première fois. Calculer de même la probabilité ν_n que la pièce B donne n piles et, à la $(n+1)^{\text{ème}}$ expérience, face pour la première fois.

   (b) Montrer que les suites $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définissent des lois de probabilité sur $\mathbb{N}$. Ces lois seront notées dorénavant respectivement μ et ν.

2. On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et dont les lois de probabilité sont respectivement μ et ν. (La variable aléatoire X représente le nombre d'expériences qu'il faut réaliser avant que la pièce A donne face pour la première fois et la variable Y représente le nombre d'expériences qu'il faut réaliser avant que la pièce B donne face pour la première fois).

   (a) Calculer l'espérance $\mathbf{E}(X)$ et la variance $\mathbf{V}(X)$.

   (b) Trouver, pour tout entier naturel k, la valeur de $\mathbf{P}([X \geq k])$.

   (c) On s'intéresse au nombre d'expériences qu'il faut réaliser avant que l'une au moins des pièces donne face pour la première fois. Pour cela on note M la variable aléatoire définie par $M = \min(X, Y)$. Calculer, pour tout entier naturel k, la probabilité $\mathbf{P}([M \geq k])$. En déduire la loi de probabilité de M.

   (d) Déterminer la probabilité que la pièce B ne donne pas face avant la pièce A, c'est-à-dire $\mathbf{P}([Y \geq X])$.

3. On note $U = X + Y$.

   (a) Déterminer la loi de probabilité de U. (On distinguera les cas $a = b$ et $a \neq b$).

   (b) Calculer, pour tout couple (j, k) d'entiers naturels, les probabilités conditionnelles $\mathbf{P}_{[U=j]}([Y = k])$.

4. On suppose désormais que $a = b$. On note $V = Y - X$.

   (a) Calculer, pour tout entier naturel k et tout entier relatif r, la probabilité de l'événement $(M = k \text{ et } V = r)$. (On distinguera le cas $r \geq 0$ et le cas $r < 0$).

   (b) Trouver la loi de probabilité de V. Les variables M et V sont-elles indépendantes ?

9 HEC III 2002

"Le petit frère d'HEC III 2007" ! **Densité, fonction de répartition, min, max, statistique d'ordre, loi d'une somme de variables de Bernoulli indépendantes, fonction béta d'Euler, calcul d'une intégrale par changement de variable.**

Cet exercice met en évidence le fait que l'existence d'une espérance finie, pour une variable aléatoire, n'est pas toujours intuitive. Dans tout l'exercice, I désigne l'intervalle réel $[1, +\infty[$ et on suppose que toutes les variables aléatoires envisagées sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Partie A : première approche

1. Montrer que l'application g définie par :

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t^2} & \text{si } t \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   est une densité de probabilité.

2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans I admettant g pour densité. Déterminer, pour tout réel t, la probabilité $\mathbf{P}([X \leq t])$ et montrer que X n'admet pas d'espérance.

3. Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans I admettant g pour densité et telles que, pour tout réel t, les événements $[X \leq t]$ et $[Y \leq t]$ sont indépendants. On définit alors deux variables aléatoires U et V par $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$, c'est-à-dire que, pour tout ω de Ω, $U(\omega)$ est le plus petit des nombres $X(\omega)$ et $Y(\omega)$, tandis que $V(\omega)$ est le plus grand de ces nombres.

   (a) Pour tout réel t, exprimer l'événement $[V \leq t]$ à l'aide des variables aléatoires X et Y ; en déduire la probabilité $\mathbf{P}([V \leq t])$.

   (b) Montrer que la variable aléatoire V admet pour densité l'application h définie par :

$$h(t) = \begin{cases} \dfrac{2(t-1)}{t^3} & \text{si } t \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   (c) De façon analogue, calculer pour tout réel t la probabilité $\mathbf{P}([U > t])$ et en déduire que la variable aléatoire U admet pour densité l'application m définie par :

$$m(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{t^3} & \text{si } t \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   (d) Montrer que V n'admet pas d'espérance et que U admet une espérance que l'on calculera.

Partie B : situation plus générale

Dans cette partie, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et on suppose que n visiteurs, numérotés de 1 à n, se rendent aléatoirement dans un musée et que, pour tout entier de l'intervalle $[\![1, n]\!]$, l'heure d'arrivée du visiteur numéro k est une variable aléatoire X_k admettant pour densité l'application g définie dans la **partie A**. On suppose de plus que, pour tout réel t, les événements $[X_1 \leq t]$, $[X_2 \leq t], \ldots, [X_n \leq t]$ sont mutuellement indépendants. Si r est un entier de l'intervalle $[\![1, n]\!]$, on note T_r la variable aléatoire désignant l'heure d'arrivée du r-ième arrivant. La **partie A** traite donc du cas $n = 2$, les variables aléatoires U et V étant respectivement égales à T_1 et T_2.

1. Soit t un élément de I fixé. Pour tout entier k de $[\![1, n]\!]$, on note B_k la variable aléatoire prenant la valeur 1 lorsque l'événement $[X_k \leq t]$ est réalisé et la valeur 0 sinon.

   (a) Préciser, en la justifiant soigneusement, la loi de la variable aléatoire Z définie par $Z = B_1 + \ldots + B_n$.

(b) Pour tout entier r de l'intervalle $[\![1,n]\!]$, exprimer l'événement $[T_r \leq t]$ à l'aide de la variable aléatoire Z et en déduire l'égalité :

$$P([T_r \leq t]) = \sum_{k=r}^{n} \binom{n}{k} \left(1-\frac{1}{t}\right)^k \left(\frac{1}{t}\right)^{n-k}$$

(a) Vérifier, pour tout entier k de l'intervalle $[\![1,n]\!]$, l'égalité $k\binom{n}{k} - (n+1-k)\binom{n}{k-1} = 0$.

(b) En déduire que, pour tout entier r de l'intervalle $[\![1,n]\!]$, la variable aléatoire T_r admet pour densité l'application f_r définie par :

$$f_r(t) = \begin{cases} r\binom{n}{r} \left(\frac{1}{t}\right)^{n+2-r} \left(1-\frac{1}{t}\right)^{r-1} & \text{si } t \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(c) Donner un équivalent à $t f_r(t)$ quand t tend vers $+\infty$ et en déduire que les variables aléatoires $T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}$ admettent une espérance alors que T_n n'en admet pas.

2. Pour tout couple (p,q) d'entiers naturels, on pose $J(p,q) = \displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx$.

(a) À l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout couple (p,q) d'entiers naturels, la relation :
$$(p+1)J(p,q+1) = (q+1)J(p+1,q)$$

(b) Calculer, pour tout entier naturel q, l'intégrale $J(0,q)$.

(c) Montrer par récurrence sur p que, pour tout couple d'entiers naturels (p,q), on a :

$$J(p,q) = \frac{p!\,q!}{(1+p+q)!}$$

3. Soit r un entier de l'intervalle $[\![1,n-1]\!]$.

(a) Si a est un réel strictement supérieur à 1, transformer en effectuant le changement de variable $x = \dfrac{1}{t}$ l'intégrale $\displaystyle\int_1^a t\,f_r(t)\,dt$.

(b) En déduire la valeur de l'espérance de la variable aléatoire T_r en fonction de n et de r.

10 HEC III 1996

Tirages par lots, loi géométrique, recherche d'une conjecture.

On désigne par m un entier fixé supérieur ou égal à 2.

Une urne contient m boules numérotées de 1 à m. On note E l'ensemble de ces boules et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

Un dispositif permet d'effectuer le tirage au hasard d'une partie de ces boules, de telle manière que chacune des parties de E (c'est-à-dire chacun des éléments de $\mathcal{P}(E)$, y compris la partie vide ou l'ensemble de toutes les boules) ait la même probabilité d'être tirée.

1. On effectue un tirage.
   (a) Quelle est la probabilité que la boule portant le numéro 1 appartienne à l'ensemble de boules tirées ?
   (b) Pour tout entier i vérifiant $1 \leq i \leq m$ on note A_i l'évènement : "la boule portant le numéro i appartient à l'ensemble de boules tirées". Les évènements A_i sont-ils indépendants ?
   (c) Quelle est l'espérance de la variable aléatoire égale au nombre de boules qui ont été tirées ? Quelle est sa variance ?
   (d) La probabilité de tirer un nombre pair de boules est-elle supérieure à la probabilité d'en tirer un nombre impair ?
2. On effectue maintenant une suite de tirages de la forme précédente, en remettant dans l'urne l'ensemble des boules tirées, après chaque tirage.
   (a) Déterminer, pour tout entier $k \geq 1$, la probabilité que la boule numéro i soit tirée pour la première fois au $k^{ième}$ tirage.
   (b) On note T_i la variable aléatoire qui prend la valeur k (k entier supérieur ou égal à 1) si la boule numéro i est tirée pour la première fois au $k^{\text{ième}}$ tirage. Déterminer l'espérance de T_i .
   (c) On admet, sans que la justification en soit demandée, que les variables aléatoires T_1, T_2, ..., T_m sont indépendantes. On note T le nombre minimum de tirages qu'il faut effectuer pour que chacune des m boules ait été tirée au moins une fois. Déterminer, pour tout entier $k \geq 1$, la probabilité que T soit inférieure ou égale à k. En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire T.
3. On effectue maintenant une suite de tirages, sans remettre dans l'urne, après chaque tirage, les boules tirées. Chaque tirage consiste encore à prendre au hasard une partie des boules qui restent dans l'urne, chacune des parties de l'ensemble des boules restantes ayant la même probabilité d'être tirée.
   (a) Calculer la probabilité pour que les m boules soient toutes tirées en au plus deux tirages. Calculer la probabilité pour que les m boules soient toutes tirées en exactement deux tirages.
   (b) Pour tout $k \geq 1$ déterminer plus généralement la probabilité pour que les m boules soient toutes tirées en au plus k tirages (On pourra raisonner par récurrence).

11 HEC III 1992

Loi d'une variable à densité, moments, somme et produit de variables à densité, covariance, espérance.

Soit n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 3 et p un nombre réel tel que $0 < p < 1$. Une entreprise de transport possède n véhicules identiques numérotés de 1 à n. Le jour J, chaque véhicule a la probabilité p d'être en état de marche et la probabilité $1-p$ d'être en panne. On suppose que les pannes des différents véhicules surviennet de façon indépendante.

1. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de véhicules en état de marche le jour J.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de Y.
   (b) Calculer les espérances $\mathbf{E}(Y)$, $\mathbf{E}(Y(Y-1))$, $\mathbf{E}((Y-2)(Y-1)Y)$. Vérifier que les rapports $\dfrac{\mathbf{E}(Y(Y-1))}{\mathbf{E}((n-1)Y)}$ et $\dfrac{\mathbf{E}((Y-2)(Y-1)Y)}{\mathbf{E}((n-2)(n-1)Y)}$ sont indépendants de n.
2. On se place le jour J. Pour tout nombre entier i tel que $1 \leq i \leq n$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le véhicule numéroté i est en état de marche ce jour-là et 0 sinon. Exprimer Y à l'aide des X_i.
3. On se place encore le jour J. L'entreprise désire utiliser ses véhicules par équipes de deux ; une équipe est constituée d'une paire de véhicules, notée $\{i, j\}$, où i et j sont deux entiers distincts (une paire ne dépend pas de l'ordre dans lequel on écrit les entiers i et j).
   (a) Soient i et j deux entiers distincts compris entre 1 et n. Interpréter la variable X_iX_j. Trouver sa loi de probabilité et son espérance.
   (b) On note $Z = \sum\limits_{(i,j)\in A} X_iX_j$ la variable aléatoire obtenue en faisant la somme des variables aléatoires X_iX_j quand $\{i, j\}$ parcourt l'ensemble A des paires d'entiers distincts entre 1 et n. Interpréter la variable Z. Calculer son espérance.
   (c) Etablir la relation :
   $$Y^2 = Y + 2Z$$
   A l'aide de la **question 1.b** retrouver l'espérance de Z.
   (d) Calculer la covariance de Y et Z.
4. Soit α un nombre réel tel que $0 < \alpha < 1$. On suppose qu'un véhicule en état de marche le jour J a la probabilité α d'être en panne le jour $J+1$ et que tout véhicule en panne le jour J est remis en état de marche le jour $J+1$. On note X_i' et Y' les variables aléatoires définies le jour $J+1$ respectivement comme X_i et Y le sont le jour J.
   (a) Trouver les lois de probabilité de X_i' et de Y'.
   (b) Montrer que si $p < \dfrac{1}{2}$, le nombre moyen de véhicules en état de marche le jour $J+1$ est supérieur au nombre moyen de véhicules en état de marche le jour J.
   (c) On prend $\alpha = 1/10$. Déterminer la valeur de p pour laquelle le nombre moyen de véhicules en état de marche le jour $J+1$ est le même que le jour J.

12 EDHEC 1997

Espérance et antirépartition : cas discret et continu, reste d'une intégrale convergente, suite définie par une intégrale impropre convergente.

Dans ce problème n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

Partie I

On effectue $2n$ tirages au hasard dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.
Un tirage consiste à extraire une boule de l'urne, la boule tirée étant remise dans l'urne.
On note N la variable aléatoire égale au numéro du tirage au cours duquel, pour la première fois, on a obtenu une boule déjà obtenue auparavant.

1. Montrer que $N(\Omega) = [\![2, n+1]\!]$.
2. Montrer que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbf{P}([N > k]) = \dfrac{A_n^k}{n^k}$
   Rappel : A_n^k désigne le nombre d'arrangements de k éléments d'un ensemble à n éléments.
3. (a) Montrer que pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, $\mathbf{P}(N = k) = \mathbf{P}([N > k-1]) - \mathbf{P}([N > k])$.
   (b) Calculer $\mathbf{P}([N = n+1])$ puis en déduire la loi de N.
4. Montrer que l'espérance $\mathbf{E}(N)$ de la variable aléatoire N est $\mathbf{E}(N) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{A_n^k}{n^k}$.

Partie II

Soit X une variable aléatoire, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, de densité f (nulle sur $\mathbb{R}_-^*$) et de fonction de répartition F. On suppose, de plus, f continue sur $\mathbb{R}_+$.

On pose, pour tout réel x positif, $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^x t\, f(t)\, dt$.

1. Montrer, grâce à une intégration par parties, que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi(x) = \int_0^x (1 - F(t))\, dt - x\mathbf{P}([X > x])$$
2. On suppose, dans cette question, que l'intégrale $\displaystyle\int_0^x (1 - F(t))\, dt$ converge.
   (a) Calculer $\varphi'(x)$ et en déduire que la fonction φ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Montrer que φ est majorée et en déduire que X a une espérance.
   (c) Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq x\mathbf{P}([X > x]) \leq \int_x^{+\infty} t\, f(t)\, dt$$
   (d) En utilisant le fait que X a une espérance, montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_x^{+\infty} t\, f(t)\, dt = 0$.
   En déduire $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x\mathbf{P}([X > x])$, puis montrer que $\mathbf{E}(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F(t))\, dt$.

Partie III

On considère la fonction F_n définie par :
$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que F_n est la fontion de répartition d'une variable aléatoire à densité T_n.

2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel k, l'intégrale $I_k = \int_0^{+\infty} x^k e^{-x} dx$ converge.
   (b) Montrer que $I_{k+1} = (k+1) I_k$ puis donner la valeur de I_k.
3. En déduire , en utilisant la **partie II**, que T_n a une espérance et que $\mathbf{E}(T_n) = \mathbf{E}(N)$.

Deuxième partie

Correction

13 EML III 2007

1. Cette question ne pose aucun problème en introduisant une variable aléatoire suivant la **loi exponentielle de paramètre 1**, alors une de ses densité pourrait être f sans aucun problème.
2. (a) Remarquez que le constat précédent nous fait écrire que $X \hookrightarrow \varepsilon(1)$.
Par définition, nous avons $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([Y=0]) &= \mathbf{P}([X<1]) \\ &= F_X(1) \text{ où } F_X \text{ est la fonction de répartition de } X \\ &= 1-e^{-1} \end{aligned} \tag{1}$$

Pour tout entier naturel n non nul,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([Y=n]) &= \mathbf{P}([n \leq X < n+1]) \\ &= F_X(n+1) - F_X(n) \\ &= \left(1-e^{-(n+1)}\right) - \left(1-e^{-n}\right) \\ &= e^{-n} - e^{-(n+1)} \\ &= e^{-n}\left(1-e^{-1}\right) \end{aligned} \tag{2}$$

Selon (1) et (2) :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}([Y=n]) = e^{-n}\left(1-e^{-1}\right)}$$

(b) La variable $Y+1$ est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ avec pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([Y+1=n]) &= \mathbf{P}([Y=n-1]) \\ &= e^{-(n-1)}\left(1-e^{-1}\right) \\ &= \left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}\left(1-\frac{1}{e}\right) \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{Y+1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(1-\frac{1}{e}\right)}$$

Comme d'après le cours, $Y+1$ admet admet une espérance et une variance (en tant que variable géométrique), Y admet donc une espérance et une variance , respectivement égales[1] à :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Y) &= \mathbf{E}(Y+1) - 1 \text{ par propriété de } \mathbf{E} \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{e}} - 1 \\ &= \frac{1}{e-1} \end{aligned}$$

[1] On rappelle les équivalences suivantes :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \mid \quad aX+b \text{ admet une espérance} \iff X \text{ admet une espérance}$$
$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \mid \quad aX+b \text{ admet une variance} \iff X \text{ admet une variance}$$

D'autre part par propriété de la variance :

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(Y) &= \mathbf{V}(Y+1)\\ &= \frac{\frac{1}{e}}{\left(1-\frac{1}{e}\right)^2}\\ &= \frac{e}{(e-1)^2}\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{E}(Y)=\frac{1}{e-1} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(Y)=\frac{e}{(e-1)^2}}$$

Nota bene : nous pouvions constater que $Y=\lfloor X\rfloor$ mais l'énoncé ne l'a pas précisé pour ne pas faire peur peut-être !

3. (a) La variable T admet une espérance en tant que produit de deux variables, $2U-1$ et Y, admettant chacun un **moment d'ordre deux**. Avec :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(T) &= \mathbf{E}((2U-1)Y)\\ &= \mathbf{E}(2U-1)\,\mathbf{E}(Y) \text{ par linéarité de l'espérance et par indépendance de } U \text{ et } Y\\ &= (2\mathbf{E}(U)-1)\,\mathbf{E}(Y) \text{ par propriété de } \mathbf{E}\\ &= \left(2\times\frac{1}{2}-1\right)\mathbf{E}(Y) \text{ car } U \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{E}(T)=0}$$

(b) Vérifions ...

$$\begin{aligned}T^2 &= \left((2U-1)^2\,Y^2\right)\\ &= 4U^2Y^2-4UY^2+Y^2\\ &= 4UY^2-4UY^2+Y^2\\ &= Y^2\end{aligned}$$

Car du fait que U suit une *loi de Bernoulli*, nous avons l'égalité $U^2=U$. En effet :

$$\begin{aligned}&\forall\omega\in\Omega,\quad (U(\omega)=1) \iff \left(U^2(\omega)=1\right) \quad \text{puisque } U(\Omega)=\{0,1\}\\ \text{et}\ &\forall\omega\in\Omega,\quad (U(\omega)=0) \iff \left(U^2(\omega)=0\right) \quad \text{puisque } U(\Omega)=\{0,1\}\end{aligned}$$

Cette égalité se généralise pour n'importe quelle puissance non nulle. Comme Y^2 admet une espérance, T^2 en admet une aussi. Autrement dit T admet une variance égale selon le **théorème de Huygens-Koenig** à :

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(T) &= \mathbf{E}\left(T^2\right)-(\mathbf{E}(T))^2\\ &= \mathbf{E}\left(Y^2\right)\\ &= \mathbf{V}(Y)+(\mathbf{E}(Y))^2 \text{ selon le } \textbf{théorème de Huygens-Koenig}\\ &= \frac{e}{(e-1)^2}+\left(\frac{1}{e-1}\right)^2\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{V}(T)=\frac{e+1}{(e-1)^2}}$$

(c) Nous avons $T(\Omega) = \mathbb{Z}$ avec selon la **formule des probabilités totales** :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \mathbf{P}([T=n]) = \mathbf{P}([T=n] \cap [U=0]) + \mathbf{P}([T=n] \cap [U=1])$$

car les événement $[U=0]$ et $[U=1]$ constituent un **système complet d'événements**. Ainsi pour tout entier relatif n :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([T=n]) &= \mathbf{P}([(2U-1)Y=n] \cap [U=0]) + \mathbf{P}([(2U-1)Y=n] \cap [U=1]) \\ &= \mathbf{P}([-Y=n] \cap [U=0]) + \mathbf{P}([Y=n] \cap [U=1]) \\ &= \mathbf{P}([Y=-n] \cap [U=0]) + \mathbf{P}([Y=n] \cap [U=1]) \end{aligned}$$

Discutons maintenant :
– Si $n=0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([T=0]) &= \mathbf{P}([Y=0] \cap [U=0]) + \mathbf{P}([Y=0] \cap [U=1]) \\ &= \mathbf{P}([Y=0])\,\mathbf{P}([U=0]) + \mathbf{P}([Y=0])\,\mathbf{P}([U=1]) \\ &= \mathbf{P}([Y=0]) \\ &= 1-e^{-1} \qquad (3) \end{aligned}$$

– Si $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([T=n]) &= \mathbf{P}([Y=-n] \cap [U=0]) + \mathbf{P}([Y=n] \cap [U=1]) \\ &= \mathbf{P}(\emptyset \cap [U=0]) + \mathbf{P}([Y=n] \cap [U=1]) \text{ car } Y \text{ est une variable positive} \\ &= \mathbf{P}([Y=n] \cap [U=1]) \\ &= \mathbf{P}([Y=n])\,\mathbf{P}([U=1]) \text{ par indépendance de } U \text{ et } Y \\ &= \frac{1}{2}e^{-n}\left(1-e^{-1}\right) \qquad (4) \end{aligned}$$

– si $n \in \mathbb{Z}_-^*$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([T=n]) &= \mathbf{P}([Y=-n] \cap [U=0]) + \mathbf{P}([Y=n] \cap [U=1]) \\ &= \mathbf{P}([Y=-n] \cap [U=0]) + \mathbf{P}(\varnothing \cap [U=1]) \text{ car } Y \text{ est une variable positive} \\ &= \mathbf{P}([Y=-n] \cap [U=0]) \text{ avec } -n \in \mathbb{N}^* \\ &= \mathbf{P}([Y=-n])\,\mathbf{P}([U=0]) \qquad (5) \\ &= \frac{1}{2}e^{n}\left(1-e^{-1}\right) \end{aligned}$$

Conclusion : selon (3), (4) et (5)

$$\boxed{\mathbf{P}([T=0]) = 1-e^{-1} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{Z}^*, \quad \mathbf{P}([T=n]) = \frac{e^{-|n|}}{2}\left(1-e^{-1}\right)}$$

4. (a) Signalons pour commencer que la variable D est associée à la **partie décimale de la variable** X puisque l'on rappelle que $Y = \lfloor X \rfloor$, donc que $D = X - \lfloor X \rfloor$. Alors la variable D est à valeurs dans l'intervalle $[0,1[$ car rappelons encore que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1$$

puisque, par définition pour tout réel x,

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

Par conséquent en notant F_D la fonction de répartition de la variable D nous pouvons immédiatement dire que :

$$\boxed{\begin{array}{lll} F_D(t) = 0 & \text{si} & t < 0 \\ F_D(t) = 1 & \text{si} & t \geq 1 \end{array}}$$

(b) Comme la famille des événements $([Y=n])_{n\in\mathbb{N}}$ constitue un **système complet d'événements** nous pouvons écrire pour tout réel $t \in [0,1[$,

$$\begin{aligned}
[D\le t] &= [D\le t]\cap\Omega \\
&= ([D\le t])\cap\left(\biguplus_{n\in\mathbb{N}}[Y=n]\right) \\
&= \biguplus_{n\in\mathbb{N}}([D\le t]\cap[Y=n]) \text{ par \textbf{distributivité} de } \cap \text{ sur } \cup \\
&= ([D\le t]\cap[Y=0])\uplus\left(\biguplus_{n\in\mathbb{N}^*}([D\le t]\cap[Y=n])\right) \\
&= ([X-Y\le t]\cap[Y=0])\uplus\left(\biguplus_{n\in\mathbb{N}^*}([X-Y\le t]\cap[Y=n])\right) \\
&= \underbrace{([X\le t]\cap[X<1])}_{=[X\le t] \text{ car } [X\le t]\subset[X<1]}\uplus\left(\biguplus_{n\in\mathbb{N}^*}([X-Y\le t]\cap[Y=n])\right) \\
&= [X\le t]\uplus\left(\biguplus_{n\in\mathbb{N}^*}([X-n\le t]\cap[n\le X<n+1])\right) \\
&= ([X\le t])\uplus\left(\biguplus_{n\in\mathbb{N}^*}([X\le n+t]\cap[n\le X<n+1])\right) \\
&= ([X\le t])\uplus\left(\biguplus_{n\in\mathbb{N}^*}([n\le X<\min(n+t,n+1)])\right) \\
&= ([X\le t])\uplus\left(\biguplus_{n\in\mathbb{N}^*}([n\le X<n+t])\right) \\
&= ([0\le X\le 0+t])\uplus\left(\biguplus_{n\in\mathbb{N}^*}([n\le X<n+t])\right) \\
&= \biguplus_{n\in\mathbb{N}}([n\le X<n+t])
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall t\in[0,1[,\quad [D\le t]=\biguplus_{n\in\mathbb{N}}([n\le X<n+t])}$$

(c) Nous avons pour tout nombre réel $t\in[0,1[$, et pour tout entier naturel n :

$$\mathbf{P}([n\le X\le n+t]) = F_X(n+t)-F_X(n) = \left(1-e^{-(n+t)}\right)-\left(1-e^{-n}\right)$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad \forall t\in[0,1[,\quad \mathbf{P}([n\le X\le n+t]) = e^{-n}\left(1-e^{-t}\right)}$$

(d) Pour tout nombre réel $t\in[0,1[$:

$$\begin{aligned}
F_D(t) &= \mathbf{P}\left(\left[\biguplus_{n\in\mathbb{N}}([n\le X<n+t])\right]\right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbf{P}([([n\le X<n+t])]) \text{ par } \sigma-\textit{additivité} \text{ de } \mathbf{P} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}e^{-n}\left(1-e^{-t}\right) \\
&= \left(1-e^{-t}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^n \textit{ somme de série géométrique} \\
&\quad \text{de raison } 1/e \text{ tel que } |1/e|<1 \\
&= \frac{1-e^{-t}}{1-1/e}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t\in[0,1[,\quad F_D(t)=\frac{1-e^{-t}}{1-e^{-1}}}$$

(e) Faisons le bilan :

$$\boxed{F_D(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ \dfrac{1-e^{-t}}{1-e^{-1}} & \text{si} \quad t \in [0,1[\\ 1 & \text{si} \quad t \geq 1 \end{cases}}$$

Nous voyons à ce niveau que :

- F_D est continue sur $]-\infty, 0[$ (fonction nulle) ;
- F_D est continue sur $[1, +\infty[$ (fonction constante égale à 1) ;
- F_D est continue sur $[0, 1[$ (composition de $t \longmapsto -t : \mathcal{C}^0$ sur $[0, 1[$ et $\exp : \mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$) ;
- D'autre part F_D est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf peut être en 0 et 1 ce qui fait qu'elle possède toutes les propriétés requises pour affirmer que D est une variable à densité dont une densité f_D est obtenue par dérivation de F_D sur $\mathbb{R}^*$ et nous poserons que :

$$f_D(0) = f_D(1) = 0$$

Cela donne :

$$\boxed{f_D(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[\\ \dfrac{e^{-t}}{1-e^{-1}} & \text{si} \quad t \in]0, 1[\end{cases}}$$

✠✠✠✠✠

14 EML III 2006

Partie A

1. Soit U une variable aléatoire à densité suivant une loi normale d'espérance nulle et de variance $\frac{1}{2}$.

   (a) C'est une question de cours ! En notant f_U une densité de U nous prendrons par exemple :

   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_U(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{2x^2}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-x^2\right)}$$

   (b) Il est de notoriété publique d'affirmer que $\mathbf{V}(U)$ existe et vaut $\frac{1}{2}$ et selon le **théorème de Huygens-Koenig** :

   $$\begin{aligned} \mathbf{V}(U) &= \mathbf{E}\left(U^2\right) - (\mathbf{E}(U))^2 \\ &= \mathbf{E}\left(U^2\right) \text{ puisque la } U \text{ est } \textbf{centrée} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx \text{ par } \textbf{parité} \text{ de } f_U \end{aligned}$$

   Par conséquent :

   $$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}$$

   ce qui montre que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx$ converge et vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$.
   Conclusion :

   $$\boxed{\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}} \qquad (6)$$

2. C'est parti pour deux points essentiels à vérifier :
   - F est continue sur $\mathbb{R}_-$ puisque F y coïncide avec la fonction nulle et sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que somme de telles fonctions. D'autre part $\lim\limits_{0^-} F = \lim\limits_{0^+} F = F(0) = 0$ et F est continue en 0 donc sur $\mathbb{R}$ finalement.
   - F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_-$ puisque F y coïncide avec la fonction nulle et sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que somme de telles fonctions. (Il est totalement inutile de perdre votre temps en 0 puisque une fonction de répartition d'une variable à densité doit être de classe $\mathcal{C}^1$ presque partout).

   Conclusion : selon les deux propriétés précédentes nous pouvons affirmer que

   $$\boxed{F \text{ est la fonction de répartition d'une variable à densité}}$$

   Une densité f est obtenue à partir de F par **dérivation** sur $\mathbb{R}^*$ et nous complèterons sa définition en posant $f(0) = 0$ ce qui donne :

   $$\boxed{f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}_-^* \\ 2xe^{-x^2} & \text{si } x \in \mathbb{R}_+ \end{cases}}$$

3. (a) La variable X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx$ est absolument convergente et comme f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}_-$, X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_0^{+\infty} 2x^2 e^{-x^2} dx$ est convergente, ce qui est le cas puisque nous reconnaissons à un coefficient multiplicatif près l'intégrale de l'égalité (6).
   Conclusion : X admet une espérance égale à

   $$\boxed{\mathbf{E}(X) = \int_0^{+\infty} 2x^2 e^{-x^2} dx = \frac{2\sqrt{\pi}}{4} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

(b) ► D'évidence si $y<0$, l'événement $\left[X^2 \leq y\right]$ est impossible et dans ce cas $\mathbf{P}\left(\left[X^2 \leq y\right]\right)=0$.
► Si maintenant $y \geq 0$, puisque l'application $x \longmapsto \sqrt{x}$ est une bijection croissante sur $\mathbb{R}_+$, nous avons les équivalences suivantes :

$$\left(X^2 \leq y\right) \Longleftrightarrow (|X| \leq \sqrt{y}) \Longleftrightarrow (-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$$

et :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\left[X^2 \leq y\right]\right) &= \mathbf{P}([-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}]) \\
&= F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y}) \\
&= F(\sqrt{y}) - 0 \text{ puisque } -\sqrt{y} \leq 0 \\
&= 1-e^{-y}
\end{aligned}$$

Faisons le bilan :

$$\boxed{\mathbf{P}\left(\left[X^2 \leq y\right]\right)=\begin{cases} 0 & \text{si } \ y \in \mathbb{R}_-^* \\ 1-e^{-y} & \text{si } \ y \in \mathbb{R}_+ \end{cases}}$$

(c) Le résultat précédent, au demeurant culturel, montre clairement que :

$$\boxed{X^2 \hookrightarrow \varepsilon(1)}$$

Nous avons la célèbre **condition nécessaire et suffisante** : X admet une variance si et seulement si X admet un moment d'ordre deux, ce qui est le cas ici puisque X^2 est une variable exponentielle.
Conclusion : X admet une variance égale, selon le **théorème de Huygens-Koenig** à

$$\boxed{\mathbf{V}(X)=\mathbf{E}\left(X^2\right)-(\mathbf{E}(X))^2=1-\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2=1-\frac{\pi}{4}}$$

Partie B

1. Sans commentaire particulier, puisque c'est du cours :

$$\boxed{\mathbf{E}(Z)=\frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(Z)=\frac{1-p}{p^2}}$$

2. (a) Pour commencer signalons que la variable M_n admet une espérance et une variance puisqu'elle est obtenue à partir d'une somme de n variables admettant chacune une espérance et une variance en tant que variables géométriques. Par linéarité de l'espérance nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(M_n) &= m \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(Z_k) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p} \\
&= \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{E}(M_n)=\frac{1}{p}}$$

Par **indépendance** des variables $Z_1, Z_2, ..., Z_n$ nous obtenons que :

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(M_n) &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}(Z_k) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1-p}{p^2} \\
&= \frac{1-p}{np^2}
\end{aligned}$$

et par définition :

$$\boxed{\sigma_n = \frac{1}{p}\sqrt{\frac{1-p}{n}}}$$

(b) Comme les variables aléatoires $(Z_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont **indépendantes et de même loi** on parle de variables **iid,** le **théorème de la limite centrée** nous affirme que la suite $\left(\frac{M_n - \mathbf{E}(M_n)}{\sigma(M_n)}\right)_{n\geq 1}$ **converge en loi** vers une variable N suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\left[\frac{M_n - m}{\sigma_n} \leq x\right]\right) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

et finalement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\left[0 \leq \frac{M_n - m}{\sigma_n} \leq 1\right]\right) = \Phi(1) - \Phi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{1} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx}$$

15 EML III 1997

1. Comme on effectue une suite finie de N **épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre** $\dfrac{1}{6}$ ainsi :

$$\boxed{Z \hookrightarrow \mathcal{B}\left(N, \frac{1}{6}\right)}$$

Autrement dit :

$$Z(\Omega) = [\![0, N]\!], \quad \forall n \in Z(\Omega), \quad \mathbf{P}([Z = n]) = \binom{N}{n}\left(\frac{1}{6}\right)^n \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n}$$

et d'après le cours :

$$\boxed{\mathbf{E}(Z) = \frac{N}{6} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(Z) = \frac{5N}{36}}$$

2. Tout d'abord la loi conditionnelle de X sachant que $[Z = n]$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, car on effectue une **suite finie de** n **épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre** p (probabilité d'obtenir pile).

$$\boxed{\mathbf{P}_{[Z=n]}([X = k]) = \begin{cases} \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{si} \quad k \in [\![0, n]\!] \\ 0 & \text{si} \quad k > n \end{cases}}$$

3. Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}([Z = n]) \neq 0$, alors selon la **formule des probabilités composées,** lorsque $0 \leq k \leq n \leq N$:

$$\mathbf{P}([X = k] \cap [Z = n]) = \mathbf{P}_{[Z=n]}([X = k])\, \mathbf{P}([Z = n]) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \times \binom{N}{n}\left(\frac{5}{6}\right)^{N-n}\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

Si $n > N$ ou $k > n$:

$$\mathbf{P}([X = k] \cap [Z = n]) = 0$$

car dans ce cas soit $\mathbf{P}_{[Z=n]}([X = k]) = 0$ soit $\mathbf{P}([Z = n]) = 0$.
Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{P}([X = k] \cap [Z = n]) = \begin{cases} \dbinom{n}{k}\dbinom{N}{n} p^k (1-p)^{n-k} \left(\dfrac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\dfrac{1}{6}\right)^n & \text{si} \quad 0 \leq k \leq n \leq N \\ 0 & \text{si} \quad k > n \text{ ou } n > N \end{cases}}$$

4. Nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([X = 0]) &= \sum_{n=0}^{N} \mathbf{P}([X = 0] \cap [Z = n]) \\ & \quad \text{d'après la **première version de la formule des probabilités totales**} \\ &= \sum_{n=0}^{N} (1-p)^n \binom{N}{n}\left(\frac{5}{6}\right)^{N-n}\left(\frac{1}{6}\right)^n \quad \text{selon le } \mathbf{3}. \\ &= \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n}\left(\frac{5}{6}\right)^{N-n}\left(\frac{1-p}{6}\right)^n \end{aligned}$$

Conclusion : par la formule du **binôme de Newton**

$$\boxed{\mathbf{P}([X = 0]) = \left(\frac{6-p}{6}\right)^N}$$

avec $\dfrac{5}{6} < \dfrac{6-p}{6} < 1$.

5. Sans commentaire particulier, pour tout couple d'entiers naturels (k,n) tel que $0 \leq k \leq n \leq N$:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}\binom{N}{n} &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \times \frac{N!}{n!\,(N-n)!} \\ &= \frac{N!}{k!\,(N-k)!} \times \frac{(N-k)!}{(n-k)!\,(N-n)!} \\ &= \binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k}\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall\,(k,n) \in \mathbb{N}^2, \quad 0 \leq k \leq n \leq N, \quad \binom{n}{k}\binom{N}{n} = \binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k}}$$

Toujours selon la **première version de la formule des probabilités totales** pour tout $k \in [\![0, N]\!]$:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([X=k]) &= \sum_{n=0}^{n-1} \mathbf{P}([X=k] \cap [Z=n]) + \sum_{n=k}^{N} \mathbf{P}([X=k] \cap [Z=n]) \\ &= 0 + \sum_{n=k}^{N} \binom{n}{k}\binom{N}{n} p^k (1-p)^{n-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^n \quad \text{selon le } \mathbf{3}. \\ &= \sum_{n=k}^{N} \binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k} p^k (1-p)^{n-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^n \quad \text{posons } i = n-k \\ &= \sum_{i=0}^{N-k} \binom{N}{k}\binom{N-k}{i} p^k (1-p)^{i} \left(\frac{5}{6}\right)^{(N-k)-i} \left(\frac{1}{6}\right)^{i+k} \\ &= \binom{N}{k} p^k \left(\frac{p}{6}\right)^k \sum_{i=0}^{N-k} \binom{N-k}{i} \left(\frac{1-p}{6}\right)^i \left(\frac{5}{6}\right)^{(N-k)-i}\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall k \in [\![0, N]\!], \quad \mathbf{P}([X=k]) = \binom{N}{k} p^k \left(\frac{p}{6}\right)^k \left(\frac{6-p}{6}\right)^{N-k}}$$

selon la formule du **binôme de Newton**, avec $\dfrac{1-p+5+p}{6} = 1$.

6. (a) ▶ **Déterminons la loi de X.**

$$\boxed{\forall k \in [\![0, N]\!], \quad \mathbf{P}([X=k]) = \binom{N}{k} p^k \left(\frac{p}{6}\right)^k \left(\frac{6-p}{6}\right)^{N-k} \quad \text{et} \quad X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(N, \frac{p}{6}\right)}$$

▶ **Déterminons la loi de Y.**
Comme X et Y jouent un rôle symétrique (on remplace pile par face) alors :

$$\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(N, \frac{1-p}{6}\right)}$$

7. Comme $\mathbf{P}([X=N] \cap [Y=N]) = 0$ alors que $\mathbf{P}([X=N])\,\mathbf{P}([Y=N]) \neq 0$ ceci est un **contre-exemple** montrons que :

$$\boxed{X \text{ et } Y \text{ sont non indépendantes}}$$

Déterminons la loi du couple (X, Y).
Nous avons :

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![0, N]\!]$$

et :

$$\forall\,(i,j) \in ([\![0, N]\!])^2\,, \quad \mathbf{P}([X=i] \cap [Y=j]) = \begin{cases} \mathbf{P}([Z=i+j] \cap [X=i]) & \text{si } 0 \leq i+j \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Conclusion : pour tout couple $(i,j) \in (\llbracket 0, N \rrbracket)^2$:

$$\boxed{\mathbf{P}\left([X=i]\cap[Y=j]\right) = \begin{cases} \dbinom{N}{i+j}\dbinom{i+j}{i} p^i (1-p)^j \left(\dfrac{5}{6}\right)^{N-(i+j)} \left(\dfrac{1}{6}\right)^{i+j} & \text{si } 0 \leq i+j \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

✠✠✠✠✠

16 ESCP III 2003

1. (a) La suite $(v_n)_{n\geq 1}$ appartient à A si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad s\,(\alpha\,(n+1)+\beta) = (s-1)\,(\alpha n+\beta)+b+n$$

soit encore :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n\,(\alpha-1)+s\alpha+\beta-b=0$$

En particulier pour $n=1$ et $n=2$ nous obtenons le système :

$$\begin{aligned} & \left\{\begin{array}{l}(\alpha-1)+s\alpha+\beta-b=0\\ 2\,(\alpha-1)+s\alpha+\beta-b=0\end{array}\right.\\ \iff & \left\{\begin{array}{l}\alpha\,(1+s)+\beta=b\\ \alpha\,(2+s)+\beta=b+2\end{array}\right.\\ \iff & \boxed{\left\{\begin{array}{l}\alpha=1\\ \beta=b-s\end{array}\right.}\end{aligned}$$

(b) Pour tout entier naturel non nul n, les deux égalités suivantes sont vérifiées :

$$\left\{\begin{array}{l} s\,x_{n+1}=(s-1)\,x_n+b+n\\ s\,v_{n+1}=(s-1)\,v_n+b+n\end{array}\right.$$

En retranchant membre à membre les deux égalités, on obtient $s\,y_{n+1}=(s-1)\,y_n$ ou encore, puisque $s\neq 0$:

$$y_{n+1}=\left(\frac{s-1}{s}\right)y_n$$

La suite $(y_n)_{n\geq 1}$ est donc **géométrique** de raison $\dfrac{s-1}{s}$, de premier terme y_1, égal à $x_1-1-b+s$ et, d'après le cours :

$$\boxed{\forall n\geq 1, \quad y_n=(x_1-1-b+s)\left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1}}$$

soit par la relation liant x_n à y_n nous avons finalement :

$$\boxed{\forall n\geq 1, \quad x_n=n+b-s+(x_1-1-b+s)\left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1}} \tag{7}$$

2. (a) En prenant au départ pour Ω l'**ensemble des boules en jeu** muni de la **probabilité uniforme** puisque les boules sont tirées au hasard, nous pouvons utiliser l'**identité de Laplace** pour calculer $\mathbf{P}(B_1)$ en calculant le rapport entre le nombre de boules favorables sur le nombre total de boules, ce qui donne :

$$\boxed{\mathbf{P}(B_1)=\frac{b}{s}}$$

La variable X_1 est une **variable de Bernoulli** égale à 1 si et seulement si l'événement B_1, par conséquent :

$$\boxed{u_1=\mathbf{E}\,(X_1)=\frac{b}{s}}$$

(b) Utilisons la **formule des probabilités totales** sachant que les événements B_1 et $\overline{B_1}$ constituent un **système complet d'événéments :**

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(B_2) &= \mathbf{P}_{B_1}(B_2)\mathbf{P}(B_1)+\mathbf{P}_{\overline{B_1}}(B_2)\mathbf{P}(\overline{B_1})\\ &= \left(\frac{b}{s}\right)^2+\left(\frac{a}{s}\right)\left(\frac{b+1}{s}\right) \quad \text{en respectant les modalités du tirage}\\ &= \frac{a\,(1+b)+b^2}{s^2}\end{aligned} \tag{8}$$

Faisons apparaître u_1 maintenant.

$$\begin{aligned}
\frac{b+1-u_1}{s} &= \frac{b+1-\frac{b}{s}}{s} \\
&= \frac{1}{s^2}(s-b+bs) \\
&= \frac{1}{s^2}(a+b-b+b(a+b)) \\
& \frac{1}{s^2}(a+b(a+b)) \\
&= \frac{a(1+b)+b^2}{s^2} \qquad (9)
\end{aligned}$$

Conclusion : selon (8) et (9)

$$\boxed{\mathbf{P}(B_2) = \frac{b+1-u_1}{s}}$$

(c) Soit n un entier naturel vérifiant $1 \leq n \leq a$.
Si l'événement $[X_n = k]$ est réalisé, la composition de l'urne avant le $(n+1)-$ ème tirage est de $b+n-k$ boules blanches et de $a+k-n$ boules noires. Par le même raisonnement qu' au **2.a**. nous obtenons :

$$\boxed{\forall n \in [\![1,a]\!], \quad \forall k \in [\![0,n]\!], \quad \mathbf{P}_{[X_n=k]}(B_{n+1}) = \frac{b+n-k}{s}}$$

Par la **formule des probabilités totales**, la famille événementielle $([X_n = k])_{k\in[\![0,n]\!]}$ constituant un **système complet d'événements de probabilités à priori non nulles**, il vient :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(B_{n+1}) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}_{[X_n=k]}(B_{n+1})\,\mathbf{P}([X_n=k]) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{b+n-k}{s}\right) \mathbf{P}([X_n=k]) \\
&= \left(\frac{b+n}{s}\right) \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}([X_n=k])}_{=1} - \frac{1}{s}\sum_{k=0}^{n} k\mathbf{P}([X_n=k]) \text{ par } \textbf{linéarité} \text{ de la somme} \\
&= \left(\frac{b+n}{s}\right) - \frac{1}{s}\mathbf{E}([X_n]) \\
&= \frac{b+n-u_n}{s}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in [\![1,a]\!], \quad \mathbf{P}(B_{n+1}) = \frac{b+n-u_n}{s}} \qquad (10)$$

(d) Soit n un entier naturel vérifiant $n > a$.

- Si k est un entier de l'intervalle $[\![0, n-a-1]\!]$, $n-k \geq a+1$ et il impossible d'avoir tiré $n-k$ boules noires au cours des n premiers tirages, il s'en suit que :

$$\boxed{\text{L'événement } [X_n = k] \text{ est impossible et } X_n(\Omega) \subset [\![n-a, n]\!]}$$

- Si k est un entier de l'intervalle $[\![n-a, n]\!]$, le même raisonnement qu'à la question précédente conduit aussi au résultat :

$$\boxed{\forall n > a, \quad \forall k \in [\![n-a,n]\!], \quad \mathbf{P}_{[X_n=k]}(B_{n+1}) = \frac{b+n-k}{s}}$$

– Toujours selon la **formule des probabilités totales**, avec le même système complet d'événements :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(B_{n+1}) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}_{[X_n=k]}(B_{n+1})\, \mathbf{P}([X_n=k]) \\
&= \sum_{k=0}^{n-a-1} \mathbf{P}_{[X_n=k]}(B_{n+1})\, \underbrace{\mathbf{P}([X_n=k])}_{=0} + \sum_{k=n-a}^{n} \mathbf{P}_{[X_n=k]}(B_{n+1})\, \mathbf{P}([X_n=k]) \\
&= \sum_{k=n-a}^{n} \left(\frac{b+n-k}{s}\right) \mathbf{P}([X_n=k]) \\
&= \left(\frac{b+n}{s}\right) \underbrace{\sum_{k=n-a}^{n} \mathbf{P}([X_n=k])}_{=1} - \frac{1}{s} \underbrace{\sum_{k=n-a}^{n} k\mathbf{P}([X_n=k])}_{=\mathbf{E}(X)} \text{ en développant}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall n > a, \quad \mathbf{P}(B_{n+1}) = \frac{b+n-u_n}{s}} \tag{11}$$

Conclusion : selon (10) et (11)

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(B_{n+1}) = \frac{b+n-u_n}{s}} \tag{12}$$

3. (a) Selon la **formule des probabilités totales** associée au **système complet d'événements** $(B_{n+1}, \overline{B_{n+1}})$ nous avons pour tout entier naturel $k \in [\![n+1-a, n]\!]$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([X_{n+1}=k]) &= \mathbf{P}([X_{n+1}=k] \cap B_{n+1}) + \mathbf{P}([X_{n+1}=k] \cap \overline{B_{n+1}}) \\
&= \mathbf{P}([X_n=k-1] \cap B_{n+1}) + \mathbf{P}([X_n=k] \cap \overline{B_{n+1}}) \\
&= \mathbf{P}_{[X_n=k-1]}(B_{n+1})\mathbf{P}([X_n=k-1]) + \mathbf{P}_{[X_n=k]}(\overline{B_{n+1}})\mathbf{P}([X_n=k])
\end{aligned}$$

Et en raisonnons de la même façon qu'au **2.c** :

$$\boxed{\mathbf{P}([X_{n+1}=k]) = \left(\frac{a-n+k}{s}\right)\mathbf{P}([X_n=k]) + \left(\frac{b+n-k+1}{s}\right)\mathbf{P}([X_n=k-1])} \tag{13}$$

– Pour $k = n+1$:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}([X_{n+1}=n+1]) = \mathbf{P}(B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{n+1}) = \left(\frac{b}{s}\right)^{n+1} \\
&\mathbf{P}([X_n=n]) = \left(\frac{b}{s}\right)^{n} \\
&\mathbf{P}([X_n=n+1]) = 0
\end{aligned}$$

et l'égalité (13) est vérifiée.

– Pour $k = n-a$:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}([X_{n+1}=n-a]) = 0 \\
&\mathbf{P}([X_n=n-a-1]) = 0 \text{ d'après } \mathbf{2.d} \\
&a-n+k = 0
\end{aligned}$$

et l'égalité (13) est vérifiée.

– Pour $k \in [\![1, n-a-1]\!]$:

$$[X_{n+1}=k] = \emptyset \qquad [X_n=k-1] = \emptyset \qquad [X_n=k] = \emptyset$$

et l'égalité (13) est vérifiée.

(b) Soit n un entier naturel non nul. D'après le résultat précédent :

$$\begin{aligned}
su_{n+1} &= s\sum_{k=0}^{n+1} k\mathbf{P}\left([X_{n+1}=k]\right) \\
&= s\sum_{k=1}^{n+1} k\mathbf{P}\left([X_{n+1}=k]\right) \\
&= s\sum_{k=1}^{n+1} k\left(\left(\frac{a-n+k}{s}\right)\mathbf{P}([X_n=k])+\left(\frac{b+n-k+1}{s}\right)\mathbf{P}([X_n=k-1])\right) \text{ selon (13)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} k\,(a-n+k)\,\mathbf{P}([X_n=k])+\sum_{k=1}^{n+1} k\,(b+n-k+1)\,\mathbf{P}([X_n=k-1]) \text{ par linéarité de } \sum \\
&= \sum_{k=0}^{n} k\,(a-n+k)\,\mathbf{P}([X_n=k])+\sum_{k=0}^{n} (k+1)\,(b+n-k)\,\mathbf{P}([X_n=k]) \text{ car } \mathbf{P}([X_n=n+1])=0 \\
&= (a-n)\sum_{k=0}^{n} k\,\mathbf{P}\left([X_n=k]\right)+\sum_{k=0}^{n} k^2\,\mathbf{P}\left([X_n=k]\right) \\
&\qquad +(b+n)\sum_{k=0}^{n} k\,\mathbf{P}\left([X_n=k]\right)-\sum_{k=0}^{n} k^2\,\mathbf{P}\left([X_n=k]\right) \\
&\qquad +(b+n)\sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}\left([X_n=k]\right)-\sum_{k=0}^{n} k\,\mathbf{P}\left([X_n=k]\right) \\
&= (a-n)\,\mathbf{E}\left(X_n\right)+\mathbf{E}\left(X_n^2\right)+(b+n)\,\mathbf{E}\left(X_n\right)-\mathbf{E}\left(X_n^2\right)+b+n-\mathbf{E}\left(X_n\right) \\
&= (s-1)\,\mathbf{E}\left(X_n\right)+b+n
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad su_{n+1}=(s-1)\,u_n+b+n}$$

La "boucle est bouclée" et la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ appartient à l'ensemble A.

(c) En reprenant le résultat (7), pour tout entier naturel non nul,

$$u_n=n+b-s+(u_1-1-b+s)\left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall n\geq 1,\quad u_n=n+b-s+\left(\frac{b}{s}-1-b+s\right)\left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1}}$$

et selon (12) :

$$\boxed{\forall n\geq 1,\quad \mathbf{P}\left(B_{n+1}\right)=1-\left(\frac{b}{s}-1-b+s\right)\frac{(s-1)^{n-1}}{s^n}}$$

(d) Puisque s est supérieur à deux, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1}=0$$

Par conséquent :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty \quad\text{et}\quad \lim_{n\to+\infty}\mathbf{P}\left(B_{n+1}\right)=1}$$

✠✠✠✠✠

17 ESCP III 2001

Préliminaire. Je vous laisse faire la récurrence comme des grands !

1. Comme les tirages sont caractérisés, par exemple, par l'emplacement des boules blanches puisque toutes les boules sont tirées, autrement dit l'univers est l'ensemble des dispositions possibles telles que deux cases parmi les N sont occupées par les deux boules noires les autres étant occupées par les blanches. Alors Ω est un ensemble **fini** donc d'après le cours nous pourrons prendre $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et comme les boules sont tirées **au hasard**, l'univers sera de la **probabilité uniforme P**.

1. Comme $\text{Card}(\Omega) = \text{Card}(\mathcal{P}_2(\llbracket 1, N \rrbracket))$ nous avons $\text{Card}(\Omega) = \binom{N}{2}$.
   - $(X_1, X_2)(\Omega) = \left\{(i_1, i_2) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2 \mid i_1 < i_2\right\}$.
   - $[X_1 = i] \cap [X_2 = j] = \left\{(i_1, i_2) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2 \mid i_1 = i,\ i_2 = j\right\}$.
   Par conséquent $\text{Card}([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = 1$.
   Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad (i, j) \notin (X_1, X_2)(\Omega) \\ \dfrac{1}{\binom{N}{2}} = \dfrac{2}{N(N-1)} & \text{si} \quad (i, j) \in (X_1, X_2)(\Omega) \end{cases}}$$

2. Par théorème :
   - **Loi de X_1.**
   Pour tout $i \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([X_1 = i]) &= \sum_{j=2}^{N} \mathbf{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) \\ &= 0 + \sum_{j=i+1}^{N} \mathbf{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) \\ &= \sum_{j=i+1}^{N} \frac{2}{N(N-1)} \\ &= \frac{2(N - (i+1) + 1)}{N(N-1)} \end{aligned}$$

   Conclusion :

$$\boxed{\forall i \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket, \quad \mathbf{P}([X_1 = i]) = \frac{2(N-i)}{N(N-1)}}$$

   - **Loi de X_2.**
   Pour tout $j \in \llbracket 2, N \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([X_2 = j]) &= \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} \mathbf{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) + 0 \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} \frac{2}{N(N-1)} \end{aligned}$$

   Conclusion :

$$\boxed{\forall j \in \llbracket 2, N \rrbracket, \quad \mathbf{P}([X_2 = j]) = \frac{2(j-1)}{N(N-1)}}$$

   Puisque $\mathbf{P}([X_1 = 2] \cap [X_2 = 1]) = 0$ alors que $\mathbf{P}([X_1 = 2])\,\mathbf{P}([X_2 = 1]) \neq 0$,

$$\boxed{\text{Les deux varibles sont dépendantes}}$$

4. (a) Tout d'abord :

$$\boxed{(N+1-X_2)(\Omega) = X_1(\Omega)}$$

car $X_2(\Omega) = [\![2, N]\!]$ donc $-X_2(\Omega) = [\![-N, -2]\!]$ et cela entraîne que :

$$(N+1-X_2)(\Omega) = [\![1, N-1]\!] = X_1(\Omega)$$

Pour tout entier naturel $k \in [\![1, N-1]\!]$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([N+1-X_2=k]) &= \mathbf{P}([X_2 = N+1-k]) \\ &= \frac{2(N+1-k-1)}{N(N-1)} \\ &= \frac{2(N-k)}{N(N-1)} \\ &= \mathbf{P}([X_1 = k])\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathcal{L}(N+1-X_2) = \mathcal{L}(X_1)}$$

(b) Déterminons la loi de $(X_2 - X_1)$
Tout d'abord $(X_2 - X_1)(\Omega) = [\![1, N-1]\!]$. D'autre part pour tout entier naturel $k \in [\![1, N-1]\!]$,

$$\mathbf{P}([X_2 - X_1 = k]) = \sum_{\left\{\substack{1\leq i\leq N-1 \\ 2\leq k+i\leq N}\right.} \mathbf{P}([X_2 = k+i] \cap [X_1 = i])$$

or nous avons les équivalences successives suivantes :

$$\begin{aligned} & \left\{\begin{array}{l} 1 \leq i \leq N-1 \\ 2 \leq k+i \leq N \end{array}\right. \\ \Longleftrightarrow\ & \left\{\begin{array}{l} 1 \leq i \leq N-1 \\ 2-k \leq i \leq N-k \end{array}\right. \\ \Longleftrightarrow\ & (\max(1, 2-k) \leq i \leq \min(N-1, N-k)) \\ \Longleftrightarrow\ & (1 \leq i \leq N-k)\end{aligned}$$

et pour tout entier naturel $k \in [\![1, N-1]\!]$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([X_2 - X_1 = k]) &= \sum_{1\leq i\leq N-k} \mathbf{P}([X_2 = k+i] \cap [X_1 = i]) \\ &= \sum_{1\leq i\leq N-k} \frac{2}{N(N-1)} \\ &= \frac{2(N-k)}{N(N-1)} \\ &= \mathbf{P}([X_1 = k])\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{(X_2 - X_1) \overset{\mathcal{L}}{=} X_1}$$

5. (a) Comme $(X_2 - X_1)$ et X_1 suivent la même loi, par suite $\mathbf{E}(X_2 - X_1) = \mathbf{E}(X_1)$ (aucun problème d'existence par finitude des variables) et par **linéarité de l'espérance** :

$$\mathbf{E}(X_2) - \mathbf{E}(X_1) = \mathbf{E}(X_1)$$

ou encore :

$$\mathbf{E}(X_1) = \frac{1}{2}\mathbf{E}(X_2) \tag{14}$$

D'autre part l'égalité en loi $(N+1-X_2) = X_1$ entraîne que $\mathbf{E}(N+1-X_2) = \mathbf{E}(X_1)$ et par **propriété élémentaire de l'espérance** :

$$N + 1 - \mathbf{E}(X_2) = \mathbf{E}(X_1) \tag{15}$$

Selon (14) et (15) :

$$\boxed{\mathbf{E}(X_1) = \frac{N+1}{3} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(X_2) = \frac{2(N+1)}{3}}$$

(b) L'égalité en loi $(N+1-X_2) = X_1$ entraîne l'égalité des variances $\mathbf{V}(N+1-X_2) = \mathbf{V}(X_1)$ (qui existent toujours par finitude des variables) d'où :

$$\boxed{\mathbf{V}(X_2) = \mathbf{V}(X_1)}$$

(c) Nous avons :

$$\mathbf{V}(X_2 - X_1) = \mathbf{V}(X_1) + \mathbf{V}(X_2) - 2\,\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$$

et comme $(X_2 - X_1) \overset{\mathcal{L}}{=} X_1$, l'égalité précédente donne :

$$\mathbf{V}(X_1) = \mathbf{V}(X_1) + \mathbf{V}(X_2) - 2\,\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$$

soit :

$$-2\,\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = -\mathbf{V}(X_2)$$

ou encore :

$$\boxed{2\,\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \mathbf{V}(X_1)}$$

car :

$$\mathbf{V}(X_2) = \mathbf{V}(X_1)$$

6. Comme X_1 est une variable finie, elle une variance égale à :

$$\mathbf{V}(X_1) = \mathbf{E}\left(X_1^2\right) - \left(\mathbf{E}(X_1)\right)^2$$

avec :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(X_1^2\right) &= \sum_{k=1}^{N-1} k^2 \mathbf{P}([X_1 = k]) \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} k^2 \frac{2(N-k)}{N(N-1)} \\
&= \frac{2}{N(N-1)} \sum_{k=1}^{N-1} k^2 (N-k) \\
&= \frac{2}{N(N-1)} \left(N \sum_{k=1}^{N-1} k^2 - \sum_{k=1}^{N-1} k^3 \right) \text{ par linéarité de } \sum \\
&= \frac{2}{N(N-1)} \left(N \frac{(N-1)N(2N-1)}{6} - \frac{N^2 (N-1)^2}{4} \right) \\
&= \frac{1}{6}(N+1)N
\end{aligned}$$

De plus :

$$\boxed{\mathbf{V}(X_1) = \frac{1}{6}(N+1)N - \left(\frac{N+1}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}(N+1)(N-2) = \mathbf{V}(X_2)}$$

enfin :

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \frac{(N+1)(N-2)}{36}}$$

7. (a) Comme l'événement D est réalisé si et seulement si $A \neq B$ nous avons donc :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(D) &= \mathbf{P}(A \neq B) \\
&= 1 - \mathbf{P}(A = B) \\
&= 1 - \sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}([A = i] \cap [B = i]) \\
&= 1 - \sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}([A = i])\,\mathbf{P}([B = i]) \text{ par } \textbf{indépendance} \text{ de } A \text{ et } B \\
&= 1 - \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 1 - \frac{N}{N^2} \\ &= 1 - \frac{1}{N} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{P}(D) = \frac{N-1}{N}}$$

(b) Commençons par signaler que $\mathbf{P}(D) \neq 0$, par conséquent la probabilité conditionnelle est bien définie. Par définition :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_D([Y_1 = i,\ Y_2 = j]) &= \frac{\mathbf{P}([Y_1 = i,\ Y_2 = j] \cap D)}{\mathbf{P}(D)} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \geq j \\ \dfrac{\mathbf{P}(([A = i,\ B = j] \uplus [B = i,\ A = j]) \cap D)}{\mathbf{P}(D)} & \text{si} \quad i < j \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \geq j \\ \dfrac{\mathbf{P}(([A = i,\ B = j] \uplus [A = j,\ B = i]))}{\mathbf{P}(D)} & \text{si} \quad i < j \end{cases} \\
&\quad \text{car } [A = i,\ B = j] \uplus [A = j,\ B = i] \subset D \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \geq j \\ \dfrac{\mathbf{P}([A = i,\ B = j]) + \mathbf{P}([A = j,\ B = i])}{\mathbf{P}(D)} & \text{si} \quad i < j \end{cases} \\
&\quad \text{par } \sigma - \text{additivité de } \mathbf{P} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \geq j \\ \dfrac{2}{N^2} \times \dfrac{N}{N-1} & \text{si} \quad i < j \end{cases}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1, N]\!]^2, \quad \mathbf{P}_D([Y_1 = i,\ Y_2 = j]) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \geq j \\ \dfrac{2}{N(N-1)} & \text{si} \quad i < j \end{cases}}$$

18 ESCP III 1999

1. Pour tout entier naturel non nul la variable Z_n est **bernoullienne** en tant que produit de telles variables avec par **indépendance** de X_n et Y_n :

$$\mathbf{P}([Z_n = 1]) = \mathbf{P}([X_n = 1] \cap [Y_n = 1]) = \mathbf{P}([X_n = 1])\, \mathbf{P}([Y_n = 1])$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{P}([Z_n = 1]) = pp'}$$

La covariance du couple (X_n, Z_n) existe car les deux variables en jeu admettent chacune un **moment d'ordre deux** en tant que variables bernoulliennes. Par théorème :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_n, Z_n) &= \mathbf{E}(X_n Z_n) - \mathbf{E}(X_n)\,\mathbf{E}(Z_n) \\
&= \mathbf{E}\left(X_n^2 Y_n\right) - \mathbf{E}(X_n)\,\mathbf{E}(Z_n) \\
&\quad \text{et comme toutes les variables sont bernoulliennes} \\
&= \mathbf{P}\left(\left[X_n^2 = 1\right] \cap [Y_n = 1]\right) - \mathbf{P}([X_n = 1])\,\mathbf{P}([Z_n = 1]) \\
&= \mathbf{P}([X_n = 1] \cap [Y_n = 1]) - p \times pp' \\
&= \mathbf{P}([X_n = 1])\,\mathbf{P}([Y_n = 1]) - p \times pp' \text{ par indépendance de } X_n \text{ et } Y_n \\
&= pp' - p^2 p'
\end{aligned}$$

Concluion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{Cov}(X_n, Z_n) = pp'(1-p)}$$

Comme la covariance du couple (X_n, Z_n) **n'est pas nulle,**

$$\boxed{\text{Les deux variables } X_n \text{ et } Z_n \text{ ne sont pas indépendantes}}$$

(C'est la **contraposée** de l'implication : (X_n, Z_n) indépendantes implique que $\mathrm{Cov}(X_n, Z_n) = 0$).

2. (a) Sans commentaire particulier, nous avons pour tout entier naturel non nul :

$$\boxed{A_n = \bigcap_{k=1}^{n-1} [Z_k = 0] \cap [Z_n = 1]}$$

Par suite, pour tout entier naturel non nul n :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A_n) &= \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} [Z_k = 0] \cap [Z_n = 1]\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}([Z_k = 0])\,\mathbf{P}([Z_n = 1]) \text{ par indépendance des variables } Z_k \\
&= \prod_{k=1}^{n-1} (1 - pp') \times pp'
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(A_n) = (1 - pp')^n\, pp'} \tag{16}$$

(b) Puisque $|1 - pp'| < 1$,

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}(A_n) = \lim_{n \to +\infty} (1 - pp')^n\, pp' = 0$$

et comme pour tout entier naturel non nul n, $\mathbf{P}\left(\overline{A_n}\right) = 1 - \mathbf{P}(A_n)$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{P}\left(\overline{A_n}\right) = 1$, alors :

$$\boxed{\text{On finira presque sûrement par détecter un objet défectueux}}$$

3. (a) Soit $n \geq 2$, pour tout entier k de $[\![1, n-1]\!]$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([X_k = 1] \cap A_n) &= \mathbf{P}([Z_1 = 0] \cap \ldots \cap [Z_{k-1} = 0] \cap [X_k = 1] \cap [Y_k = 0] \\
&\qquad \cap [Z_{k+1} = 0] \cap \ldots \cap [Z_{n-1} = 0] \cap [Z_n = 1]) \\
&= \prod_{j=1}^{k-1} \mathbf{P}([Z_j = 0]) \times \mathbf{P}([X_k = 1]) \times \mathbf{P}([Y_k = 0]) \\
&\qquad \times \prod_{l=k+1}^{n-1} \mathbf{P}([Z_l = 0]) \times \mathbf{P}([Z_n = 1])
\end{aligned}$$

selon toutes les hypothèses d'**indépendance** faites par l'énoncé entre les variables X_k et Y_k et d'autre part entre les variables $(Z_j)_{\left\{\substack{j\in[\![1,n]\!]\\ j\neq k}\right.}$.

Conclusion :

$$\boxed{\forall k\in[\![1,n-1]\!],\quad \mathbf{P}\left([X_k=1]\cap A_n\right)=\left(1-pp'\right)^{n-2}\times pp'\times\left(p-pp'\right)} \tag{17}$$

Par la formule des **probabilités composées**, sachant que la probabilité $\mathbf{P}\left([X_k=1]\right)$ est **non nulle** pour tout entier k de $[\![1,n-1]\!]$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left([X_k=1]\cap[Z_k=0]\right) &= \mathbf{P}_{[X_k=1]}\mathbf{P}\left([Z_k=0]\right)\mathbf{P}\left([X_k=1]\right)\\
&= \mathbf{P}_{[X_k=1]}\mathbf{P}\left([X_kY_k=0]\right)\mathbf{P}\left([X_k=1]\right)\\
&= \mathbf{P}_{[X_k=1]}\mathbf{P}\left([Y_k=0]\right)\mathbf{P}\left([X_k=1]\right)\\
&= \mathbf{P}\left([Y_k=0]\right)\mathbf{P}\left([X_k=1]\right)\ \text{ par } \textbf{indépendance} \text{ de } X_k \text{ et } Y_k
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall k\in[\![1,n-1]\!],\quad \mathbf{P}\left([X_k=1]\cap[Z_k=0]\right)=\left(1-p'\right)p} \tag{18}$$

Enfin, avant de commencer, signalons que les probabilités $\mathbf{P}(A_n)$ et $\mathbf{P}(B_k)$ pour $k\in[\![1,n-1]\!]$ sont non nulles et par **définition** d'une probabilté conditionnelle :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{A_n}\left([X_k=1]\right) &= \frac{\mathbf{P}\left([X_k=1]\cap A_n\right)}{\mathbf{P}(A_n)}\\
&= \frac{\left(1-pp'\right)^{n-2}\times pp'\times\left(p-pp'\right)}{\left(1-pp'\right)^{n}pp'}\ \text{ selon } (17) \text{ et } (16) :\\
&= \frac{p-pp'}{1-pp'}\\
&= \frac{\left(1-p'\right)p}{1-pp'}
\end{aligned} \tag{19}$$

D'autre part pour tout entier $k\in[\![1,n-1]\!]$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{B_k}\left([X_k=1]\right) &= \frac{\mathbf{P}\left([X_k=1]\cap B_k\right)}{\mathbf{P}(B_k)}\\
&= \frac{\mathbf{P}\left([X_k=1]\cap[Z_k=0]\right)}{\mathbf{P}\left([Z_k=0]\right)}\\
&= \frac{\left(1-p'\right)p}{1-pp'}\ \text{ selon } (18)
\end{aligned} \tag{20}$$

Conclusion : selon (19) et (20),

$$\boxed{\forall k\in[\![1,n-1]\!],\quad \forall n\geq 2,\quad \mathbf{P}_{A_n}\left([X_k=1]\right)=\mathbf{P}_{B_k}\left([X_k=1]\right)=\frac{p-pp'}{1-pp'}}$$

(b) Par **définition d'une probabilité conditionnelle**, avec $\mathbf{P}(A_n)\neq 0$ nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{A_n}\left([X_1=x_1],\ldots,[X_{n-1}=x_{n-1}]\right) &= \frac{\mathbf{P}\left([X_1=x_1],\ldots,[X_{n-1}=x_{n-1}],A_n\right)}{\mathbf{P}(A_n)}\\
&= \frac{\mathbf{P}\left([X_1=x_1],.,[X_{n-1}=x_{n-1}],[Z_1=0],.,[Z_{n-1}=0],[Z_n=1]\right)}{\mathbf{P}(A_n)}
\end{aligned}$$

Pour fixer les idées supposons qu'il y ait k réels x_i égaux à 1 et par conséquent $(n-1)-k$ égaux à 0, et pour augmenter le confort des écritures sans que cela soit réducteur, puisque toutes les variables X_i jouent le même rôle, supposons que pour tout entier $i\in[\![1,k]\!]$, $x_i=1$, alors :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{A_n}([X_1=1],\ldots,[X_{n-1}=x_{n-1}]) &= \frac{1}{\mathbf{P}(A_n)}\mathbf{P}([X_1=x_1,Y_1=0],\ldots,[X_k=1,Y_k=0], \\
&\qquad \underbrace{[X_{k+1}=0],\ldots,[X_{n-1}=0]}_{\substack{\text{Les var. } Z_j \text{ pour } j\in[\![k+1,n-1]\!] \text{ car elles} \\ \text{peuvent prendre n'importe qu'elles valeurs}}},[Z_n=1]) \\
&= \frac{1}{\mathbf{P}(A_n)}\prod_{i=1}^{k}\mathbf{P}([X_i=1])\times\prod_{j=1}^{k}\mathbf{P}([Y_j=0]) \\
&\qquad \times\prod_{l=k+1}^{n-1}\mathbf{P}([X_l=0])\times\mathbf{P}([Z_n=1]) \\
&= \frac{p^k(1-p')^k(1-p)^{n-k-1}pp'}{pp'(1-pp')^{n-1}} \\
&= \frac{p^k(1-p')^k(1-p)^{n-k-1}}{(1-pp')^{n-1}} \\
&= \frac{(p-pp')^k(1-p)^{n-k-1}}{(1-pp')^{n-1}} \\
&= \frac{(p-pp')^k(1-p)^{n-k-1}}{(1-pp')^k(1-pp')^{n-k-1}} \\
&= \left(\frac{p-pp'}{1-pp'}\right)^k\left(\frac{1-p}{1-pp'}\right)^{n-k-1} \\
&= \prod_{i=1}^{k}\mathbf{P}_{A_n}([X_i=1])\times\prod_{l=k+1}^{n-1}\mathbf{P}_{A_n}([X_l=0])
\end{aligned}$$

puisque :

$$\forall k\in[\![1,n-1]\!],\quad \mathbf{P}_{A_n}([X_k=0])=1-\mathbf{P}_{A_n}([X_k=1])=1-\frac{p-pp'}{1-pp'}=\frac{1-p}{1-pp'}$$

Je vous laisse le soin d'examiner, seuls, les deux cas extrêmes, à savoir $\mathbf{P}_{A_n}([X_1=0],\ldots,[X_{n-1}=0])$ et $\mathbf{P}_{A_n}([X_1=1],\ldots,[X_{n-1}=1])$ qui donnent respectivement $\prod_{i=1}^{n-1}\mathbf{P}_{A_n}([X_i=0])$ et $\prod_{i=1}^{n-1}\mathbf{P}_{A_n}([X_i=1])$.

(c) L'événement $[S_n=m]$ est réalisé si et seulement si il y a m objets parmi les $n-1$ premiers qui sont défectueux. Le conditionnement de la probabilité voulant traduire le fait que ces $n-1$ premiers objets sont non contrôlés. Il y a $\binom{n-1}{m}$ façons de choisir les m variables X_i dont la réalisation vaut 1. Ainsi pour calculer la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_{A_n}([S_n=m])$ il suffit de reprendre le résultat de la question précédente avec $k=m$, et de multiplier celui-ci par $\binom{n-1}{m}$ qui est le nombre de situations équivalentes donnant m événements $[X_i=1]$ parmi les $n-1$ possibles et $n-1-m$ événements $[X_j=0]$.

Conclusion :

$$\forall m\in[\![0,n-1]\!],\quad \mathbf{P}_{A_n}([S_n=m])=\binom{n-1}{m}\left(\frac{p-pp'}{1-pp'}\right)^m\left(\frac{1-p}{1-pp'}\right)^{n-m-1}$$

et

$$\boxed{\text{La loi conditionnelle de } S_n \text{ sachant } A_n \text{ est la loi binomiale de paramètres } n-1 \text{ et } \frac{p-pp'}{1-pp'}}$$

(d) Selon la question précédente :

$$\boxed{\mathbf{E}_{A_n}(S_n)=(n-1)\left(\frac{p-pp'}{1-pp'}\right)}$$

✠✠✠✠✠

19 ESCP III 1998

1. (a) C'est une question de cours qui ne doit pas vous poser le moindre problème, à savoir ($a = 0$ et $b = 1$) :

$$\boxed{\mathbf{E}(Z) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(Z) = \frac{1}{12}}$$

(b) La variable Y_n admet une espérance car elle est obtenue par **transformation affine** à partir de la variable X_n qui en admet une. Par **propriété élémentaire** de $\mathbf{E}$:

$$\forall n \geq 1, \quad \mathbf{E}(Y_n) = \frac{1}{n}\mathbf{E}(X_n)$$

Or, si l'on pose $W_n = X_n + 1$ alors il est de notoriété publique que W_n suit la **loi uniforme** sur l'intervalle d'entiers $[\![1, n]\!]$ (**en effet toute transformation affine appliquée à une variable uniforme redonne une variable uniforme, ce résultat est valable en discret comme en continu**). Par conséquent :

$$\mathbf{E}(W_n) = \frac{n+1}{2}$$

entraîne que :

$$\forall n \geq 1, \quad \mathbf{E}(X_n) = \mathbf{E}(W_n) - 1 = \frac{n-1}{2}$$

et :

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad \mathbf{E}(Y_n) = \frac{n-1}{2n}}$$

De même par propriété de $\mathbf{V}$ pour tout entier naturel n non nul :

$$\mathbf{V}(Y_n) = \frac{1}{n^2}\mathbf{V}(X_n) = \frac{1}{n^2}\mathbf{V}(W_n)$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad \mathbf{V}(Y_n) = \frac{n^2-1}{12n^2}}$$

Comme :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-1}{12n^2} = \frac{1}{12}$$

(toute fraction rationnelle étant équivalente en l'infini au rapport de ses termes de plus haut degré) $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{E}(Y_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{V}(Y_n)$ existent et sont finies, égales respectivement à :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}(Y_n) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbf{V}(Y_n) = \frac{1}{12}}$$

(c) Par le **théorème de transfert**, nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(f(Y_n)) &= \sum_{y\in Y(\Omega)} f(y)\,\mathbf{P}([Y=y]) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\mathbf{P}\left(\left[Y = \frac{k}{n}\right]\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\,dt
\end{aligned} \tag{21}$$

pour f continue sur $[0, 1]$ (**somme de Riemann**)

D'autre part, toujours par le **théorème de transfert** (hypothèses 2008 : f continue presque partout et intégrale absolument convergente, hypothèses 1998[2] : f est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone) :

$$\mathbf{E}(f(Z)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,u(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt \tag{22}$$

[2] Les programmes ont changé, les hypothèses aussi !

Conclusion : selon (21) et (22)

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}\left(f\left(Y_n\right)\right) = \mathbf{E}\left(f\left(Z\right)\right)}$$

2. (a) Cette question doit être parfaitement maitrisée sinon j'entame une grève de la faim ! Elle se résoud en utilisant le théorème d'existence d'une limite par encadrement puisque vous devez savoir que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad -1 + nx < \lfloor nx \rfloor \leq nx$$

donc en divisant tous les membres de l'inégalité par $n > 0$ nous obtenons que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad -\frac{1}{n} + x < \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x$$

avec :

$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} + x = \lim_{n\to+\infty} x = x$$

Conclusion : la suite $\left(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc encadrée par deux suites convergentes vers la même limite, ce qui permet de dire, d'après le **théorème d'encadrement**, que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x} \tag{23}$$

(b) Rappelons encore que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

Déterminons le nombre d'entiers k vérifiant $na < k \leq nb$. En utilisant la **définition** de la partie entière d'un réel, nous pouvons écrire sans peine que :

$$\lfloor na \rfloor \leq na < k \leq nb < \lfloor nb \rfloor + 1$$

d'où, puisque k est un entier naturel :

$$\lfloor na \rfloor + 1 \leq k \leq \lfloor nb \rfloor$$

Conclusion :

$$I_n(a,b) = \lfloor nb \rfloor - (\lfloor na \rfloor + 1) + 1$$

soit :

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad 0 \leq a \leq b \leq 1, \quad I_n(a,b) = \lfloor nb \rfloor - \lfloor na \rfloor}$$

(c) Pour tout entier naturel n non nul et pour tout couple de réels $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 \leq a \leq b \leq 1$ nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left([a < Y_n \leq b]\right) &= \mathbf{P}\left(\{\omega \in \Omega \mid a < Y_n(\omega) \leq b\}\right) \\
&= \mathbf{P}\left(\left\{\omega \in \Omega \mid a < \frac{X_n(\omega)}{n} \leq b\right\}\right) \\
&= \frac{I_n(a,b)}{n}
\end{aligned}$$

Comme selon (23) :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n(a,b)}{n} &= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\lfloor nb \rfloor}{n} - \frac{\lfloor na \rfloor}{n}\right) \\
&= b - a \\
&= \int_a^b 1 dt \\
&= \mathbf{P}\left([a < Z \leq b]\right)
\end{aligned}$$

Nous pouvons donc conclure que :

$$\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad 0 \leq a \leq b \leq 1, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(a < Y_n \leq b) = \mathbf{P}(a < Z \leq b)}$$

3. (a) Je rappelle que démontrer que Z_n et Y_n ont même loi de probabilité il vous faut montrer que :
– $Z_n(\Omega) = Y_n(\Omega)$;
– $\forall k \in Z_n(\Omega) = Y_n(\Omega)$, $\mathbf{P}([Z_n = k]) = \mathbf{P}([Y_n = k])$.

Allons-y doucement ! Nous avons : $Z(\Omega) = [0,1]$ donc $(n\,Z)(\Omega) = [0,n]$ ce qui entraîne que $\lfloor n\,Z \rfloor(\Omega) = [0,n] \cap \mathbb{N}$ soit $\lfloor n\,Z \rfloor(\Omega) = [\![0,n]\!]$, d'où :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad Z_n(\Omega) = \frac{\lfloor n\,Z \rfloor}{n}(\Omega) = \left\{\frac{k}{n} \mid k \in [\![0,n]\!]\right\} = Y_n(\Omega)} \tag{24}$$

Enfin pour tout entier naturel $k \in [\![0,n-1]\!]$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\left[Z_n = \frac{k}{n}\right]\right) &= \mathbf{P}\left(\left[\frac{k}{n} \leq Z < \frac{k+1}{n}\right]\right) \text{ car } n > 0 \\
&= F_Z\left(\frac{k+1}{n}\right) - F_Z\left(\frac{k}{n}\right) \\
&= \frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} \\
&= \frac{1}{n} \\
&= \mathbf{P}\left(\left[Y_n = \frac{k}{n}\right]\right)
\end{aligned} \tag{25}$$

et :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([Z_n = 1]) &= \mathbf{P}([n \leq nZ_n < n+1]) \\
&= \mathbf{P}\left(\left[1 \leq Z_n < 1 + \frac{1}{n}\right]\right) \\
&= \int_1^{1/n} 0 \; dt \\
&= 0
\end{aligned} \tag{26}$$

Conclusion : selon (24), (25) et (26),

$$\boxed{\text{Les variables } Z_n \text{ et } Y_n \text{ suivent la même loi}}$$

(b) Notons F_{D_n} la fonction de répartition de D_n définie pour tout réel x par :

$$F_{D_n}(x) = \mathbf{P}([D_n \leq x]) = \mathbf{P}([Z - Z_n \leq x]) \text{ par définition de } D_n$$

Nous avons :

$$nz - 1 < \lfloor nz \rfloor \leq nz \quad \text{et} \quad z - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor nz \rfloor}{n} \leq z$$

donc :

$$0 \leq z - \frac{\lfloor nz \rfloor}{n} < \frac{1}{n}$$

ce qui assure que :

$$(Z - Z_n)(\Omega) = D_n(\Omega) = \left[0, \frac{1}{n}\right[$$

Par conséquent :
– Si $x < 0$: $F_{D_n}(x) = 0$;
– Si $x > \dfrac{1}{n}$: $F_{D_n}(x) = 1$;
– Si $x \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right[$:

$$\begin{aligned}
F_{D_n}(x) &= \mathbf{P}([Z - Z_n \leq x]) \\
&= \mathbf{P}\left(\left[Z - \frac{\lfloor nZ \rfloor}{n} \leq x\right]\right) \\
&= \mathbf{P}\left(\left[Z - \frac{\lfloor nZ \rfloor}{n} \leq x\right] \cap \left(\biguplus_{k=0}^{n-1} [\lfloor nZ \rfloor = k]\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{car } \left([\lfloor nZ \rfloor = k]\right)_{k\in[\![0,n-1]\!]} \text{ est un système complet} \\
= \;& \mathbf{P}\left(\biguplus_{k=0}^{n-1}\left(\left[Z-\frac{\lfloor nZ\rfloor}{n}\leq x\right]\cap[\lfloor nZ\rfloor = k]\right)\right) \\
& \text{par distributivité de } \cap \text{ sur } \cup \\
= \;& \sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{P}\left(\left(\left[Z-\frac{\lfloor nZ\rfloor}{n}\leq x\right]\cap[\lfloor n\,Z\rfloor = k]\right)\right) \\
& \text{par } \sigma - \text{additivité de } \mathbf{P} \\
= \;& \sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{P}\left(\left(\left[Z\leq x+\frac{k}{n}\right]\cap[\lfloor nZ\rfloor = k]\right)\right) \\
= \;& \sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{P}\left(\left(\left[Z\leq x+\frac{k}{n}\right]\cap[k\leq nZ<k+1]\right)\right) \\
= \;& \sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{P}\left(\left(\left[Z\leq x+\frac{k}{n}\right]\cap\left[\frac{k}{n}\leq Z<\frac{k}{n}+1\right]\right)\right) \\
= \;& \sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{P}\left(\left[\frac{k}{n}\leq Z\leq x+\frac{k}{n}\right]\right) \text{ car } x<\frac{1}{n} \\
= \;& \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{x+\frac{k}{n}}dt \\
= \;& \sum_{k=0}^{n-1}\left(x+\frac{k}{n}-\frac{k}{n}\right) \\
= \;& nx
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{F_{D_n}(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ nx & \text{si } x\in\left[0,\dfrac{1}{n}\right[\\ 1 & \text{si } x\geq\dfrac{1}{n}\end{cases}}$$

A ce niveau-là on constate que la fonction de répartition F_{D_n} vérifie les propriétés de classe (que vous devez constatez par vous-même rigoureusement) ce qui permet de dire que la variable D_n est une variable à densité dont une densité f_{D_n} est obtenue par **dérivation** de F_{D_n} sur $\mathbb{R}^* - \left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ et nous **complèterons** la définition de f_{D_n} en posant par exemple :

$$f_{D_n}(0)=f_{D_n}\left(\frac{1}{n}\right)=0$$

ce qui donne :

$$\boxed{f_{D_n}(x)=\begin{cases}n & \text{si } x\in\left]0,\dfrac{1}{n}\right[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}}$$

$$\boxed{D_n\hookrightarrow\mathcal{U}\left(\left]0,\frac{1}{n}\right[\right)}$$

(c) Pour un entier k tel que $0 \leq k \leq n-1$ et un réel y tel que $0 < y < \dfrac{1}{n}$,

$$\begin{aligned}
\left[Z_n = \frac{k}{n}\right] \cap [D_n \leq y] &= \left[Z_n = \frac{k}{n}\right] \cap [Z - Z_n \leq y] \\
&= \left[Z_n = \frac{k}{n}\right] \cap \left[Z \leq y + \frac{k}{n}\right] \\
&= \left[\frac{\lfloor n\,Z \rfloor}{n} = \frac{k}{n}\right] \cap \left[Z \leq y + \frac{k}{n}\right] \\
&= [\lfloor n\,Z \rfloor = k] \cap \left[Z \leq y + \frac{k}{n}\right] \\
&= [k \leq n\,Z < k+1] \cap \left[Z \leq y + \frac{k}{n}\right] \\
&= \left[\frac{k}{n} \leq\ Z < \frac{k}{n} + \frac{1}{n}\right] \cap \left[Z \leq y + \frac{k}{n}\right] \\
&= \left[\frac{k}{n} \leq\ Z < \min\left(\frac{k}{n} + \frac{1}{n}, y + \frac{k}{n}\right)\right] \\
&= \left[\frac{k}{n} \leq\ Z < \frac{k}{n} + y\right] \text{ puisque } 0 \leq y \leq \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Par conséquent pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ avec $0 \leq y \leq \dfrac{1}{n}$,

$$\mathbf{P}\left(\left[Z_n = \frac{k}{n}\right] \cap [D_n \leq y]\right) = \mathbf{P}\left(\left[\frac{k}{n} \leq\ Z < \frac{k}{n} + y\right]\right) = \int_{\frac{k}{n}}^{y+\frac{k}{n}} dt$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{n}, \quad \mathbf{P}\left(\left[Z_n = \frac{k}{n}\right] \cap [D_n \leq y]\right) = y}$$

(d) Comme pour tout entier k de $[\![0, n-1]\!]$, tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $y \in \left]0, \dfrac{1}{n}\right[$ nous avons l'égalité :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\left[Z_n = \frac{k}{n}\right]\right) \mathbf{P}\left([D_n \leq y]\right) &= \frac{1}{n} \times ny \\
&= y \\
&= \mathbf{P}\left(\left[Z_n = \frac{k}{n}\right] \cap [D_n \leq y]\right)
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{Les variables } Z_n \text{ et } D_n \text{ sont indépendantes}}$$

✠✠✠✠✠

20 ESCP III 1997

1. (a) Pour tout entier naturel n, calculons la probabilité μ_n que la pièce A donne n fois pile et, à la $(n+1)^{\text{ème}}$ expérience, face pour la première fois.
Notons pour tout entier non nul k, P_k (resp. F_k) l'événement : "on obtient pile (resp. face) au $k^{\text{ème}}$ essai".
– Pour $n = 0$,
$$\mu_n = \mu_0 = \mathbf{P}(F_1) = 1 - a \tag{27}$$
– Pour $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\begin{aligned} \mu_n &= \mathbf{P}(P_1 \cap \ldots \cap P_n \cap F_{n+1}) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(P_i) \times \mathbf{P}(F_{n+1}) \\ &\quad \text{par indépendance des événements} \\ &= a^n (1-a) \end{aligned} \tag{28}$$
Conclusion selon (27) et (28) :
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mu_n = a^n (1-a)}$$
De même la probabilité ν_n que la pièce B donne n piles et, à la $(n+1)^{\text{ème}}$ expérience, face pour la première fois et pour chaque entier naturel $n \neq 0$:
$$\begin{aligned} \nu_n &= \mathbf{P}(P_1 \cap \ldots \cap P_n \cap F_{n+1}) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(P_i) \times \mathbf{P}(F_{n+1}) \\ &\quad \text{par indépendance des événements} \\ &= b^n (1-b) \end{aligned}$$
et pour $n = 0$:
$$\nu_n = 1 - b$$
Conclusion :
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \nu_n = b^n (1-b)}$$
(b) Montrons que les suites $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définissent des lois de probabilité sur $\mathbb{N}$. Ces lois seront notées dorénavant respectivement μ et ν.
– Pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mu_n \geq 0$ et même $\mu_n > 0$.
– On sait parfaitement que la série $\sum\limits_{n\geq 0} \mu_n$ converge (puisque les événements associés aux μ_n sont disjoints) avec :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n (1-a) = (1-a) \times \frac{1}{1-a} = 1$$
De même :
– Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\nu_n \geq 0$ et même $\nu_n > 0$.
– La série $\sum\limits_{n\geq 0} \nu_n$ converge (puisque les événements associés aux ν_n sont disjoints) et de somme égale à :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} b^n (1-b) = (1-b) \times \frac{1}{1-b} = 1$$
Conclusion :
$$\boxed{\text{Les deux suites } (\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (\nu_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ définissent des lois de probabilité sur } \mathbb{N}}$$

2. (a) Calculons l'espérance $\mathbf{E}(X)$ et la variance $\mathbf{V}(X)$. Introduisons pour cela la variable $W = X+1$, $W \hookrightarrow \mathcal{G}(1-a)$ (c'est un standart du cours). Comme X est obtenue par **transformation affine** à partir de W, elle admet une espérance et une variance données par propriétés élémentaires, à savoir :

$$\boxed{\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(W) - 1 = \frac{a}{1-a}}$$

et :

$$\boxed{\mathbf{V}(X) = \mathbf{V}(W) = \frac{a}{(1-a)^2}}$$

(b) L'événement $[X \geq k]$ est réalisé si, et seulement si, lors des k premiers essais on a obtenu pile avec la pièce A. Donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}([X \geq k]) = a^k}$$

(c) Soit k un entier naturel,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([M \geq k]) &= \mathbf{P}([X \geq k] \cap [Y \geq k]) \\
&= \mathbf{P}([X \geq k])\,\mathbf{P}([Y \geq k]) \\
&\quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\
&= a^k b^k
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall k \geq 0, \quad \mathbf{P}([M \geq k]) = (ab)^k}$$

Maintenant calculons pour tout entier k, $\mathbf{P}([M = k])$, pour cela remarquons que pour chaque entier k :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([M \geq k]) &= \mathbf{P}([M = k] \uplus [M > k]) \\
&= \mathbf{P}([M = k]) + \mathbf{P}([M > k]) \\
&\quad \text{par } \sigma - \text{additivité de } \mathbf{P} \\
&= \mathbf{P}([M = k]) + \mathbf{P}([M \geq k+1])
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([M = k]) &= \mathbf{P}([M \geq k]) - \mathbf{P}([M \geq k+1]) \\
&= (ab)^k - (ab)^{k+1} \\
&= (ab)^k (1 - ab)
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}([M = k]) = (ab)^k (1-ab) \quad \text{et} \quad M+1 \hookrightarrow \mathcal{G}(1-ab)} \tag{29}$$

(d) Déterminons la probabilité que la pièce B ne donne pas face avant la pièce A, c'est-à-dire $\mathbf{P}([Y \geq X])$. Selon la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $([X = i])_{i \geq 0}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([Y \geq X]) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{P}([Y \geq X] \cap [X = i]) \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{P}([Y \geq i] \cap [X = i]) \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{P}([Y \geq i])\,\mathbf{P}([X = i]) \\
&\quad \text{par } \sigma - \text{additivité de } \mathbf{P} \text{ et indépendance} \\
&\quad \text{des deux variables } X \text{ et } Y \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} b^i a^i (1-a)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (1-a)\sum_{i=0}^{+\infty}(ab)^i \\
&= (1-a)\times\frac{1}{1-ab}
\end{aligned}
$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{P}([Y \geq X]) = \frac{1-a}{1-ab}}$$

3. (a) Discutons ...
   - $a = b$
     - $U(\Omega) = \mathbb{N}$.
     - Soit $k \in \mathbb{N}$:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}([U=k]) &= \sum_{i=0}^{k}\mathbf{P}([X=i]\cap[Y=k-i]) \\
&= \sum_{i=0}^{k}\mathbf{P}([X=i])\,\mathbf{P}([Y=k-i]) \\
&= \sum_{i=0}^{k}(1-a)\,a^i\,(1-a)\,a^{k-i} \\
&= (1-a)^2\sum_{i=0}^{k}a^k \text{ avec } a\neq 1
\end{aligned}
$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\quad \mathbf{P}([U=k]) = (1-a)^2\,(k+1)\,a^k}$$

   - $a \neq b$
     - $U(\Omega) = \mathbb{N}$.
     - Soit $k \in \mathbb{N}$:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}([U=k]) &= \sum_{i=0}^{k}\mathbf{P}([X=i]\cap[Y=k-i]) \\
&= \sum_{i=0}^{k}\mathbf{P}([X=i])\,\mathbf{P}([Y=k-i]) \\
&= \sum_{i=0}^{k}(1-a)\,a^i\,(1-b)\,b^{k-i} \\
&= (1-a)\,(1-b)\,b^k\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{a}{b}\right)^i \\
&\quad \text{avec } a/b\neq 1 \\
&= (1-a)\,(1-b)\,b^k\left(\frac{1-(a/b)^{k+1}}{1-a/b}\right) \\
&= (1-a)\,(1-b)\,b^{k+1}\frac{\left(b^{k+1}-a^{k+1}\right)}{b^{k+1}\,(b-a)} \\
&= \frac{(1-a)\,(1-b)\left(b^{k+1}-a^{k+1}\right)}{b-a}
\end{aligned}
$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\quad \mathbf{P}([U=k]) = \frac{(1-a)\,(1-b)\left(b^{k+1}-a^{k+1}\right)}{b-a}}$$

   (b) Tout d'abord signalons que pour tout $j\in\mathbb{N}$, $\mathbf{P}([U=j])\neq 0$, ainsi la probabilité conditionnelle a bien un sens.
   - Si $k > j$:

$$\boxed{\mathbf{P}_{[U=j]}([Y=k]) = 0}$$

– Si $k \leq j$, par définition :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{[U=j]}([Y=k]) &= \frac{\mathbf{P}([Y=k]\cap[U=j])}{\mathbf{P}([U=j])} \\
&= \frac{\mathbf{P}([Y=k]\cap[X=j-k])}{\mathbf{P}([U=j])} \\
&= \frac{\mathbf{P}([Y=k])\,\mathbf{P}([X=j-k])}{\mathbf{P}([U=j])} \\
&\quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}
\end{aligned}$$

– Si $a = b$:

$$\mathbf{P}_{[U=j]}([Y=k]) = \frac{a^{j-k}(1-a)\,a^k(1-a)}{(1-a)^2(j+1)\,a^j} = \frac{1}{j+1}$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{La loi conditionnelle de } Y \text{ sachant que } [U=j] \text{ est la loi uniforme } \mathcal{U}(\llbracket 0,j\rrbracket)}$$

– $a \neq b$:

$$\boxed{\mathbf{P}_{[U=j]}([Y=k]) = \frac{a^{j-k}(1-a)\,b^k(1-b)}{(1-a)(1-b)\left(\frac{b^{j+1}-a^{j+1}}{b-a}\right)} = \frac{(b-a)\,a^{j-k}b^k}{b^{j+1}-a^{j+1}}}$$

4. (a) Si $r \geq 0$, alors $Y \geq X$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([M=k]\cap[V=r]) &= \mathbf{P}([M=k]\cap[Y-X=r]) \\
&= \mathbf{P}([M=k]\cap[Y-X=r]) \\
&= \mathbf{P}([Y=r+k]\cap[X=k]) \\
&= \mathbf{P}([Y=r+k])\,\mathbf{P}([X=k]) \\
&\quad \text{car } X, Y \text{ sont indépendantes} \\
&= a^{k+r}(1-a)\times a^k(1-a) \\
&= (1-a)^2\,a^{2k+r} \qquad (30)
\end{aligned}$$

Si $r < 0$ alors $X \geq Y$ et :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([M=k]\cap[V=r]) &= \mathbf{P}([M=k]\cap[Y-X=r]) \\
&= \mathbf{P}([M=k]\cap[X-Y=-r]) \\
&\quad \text{avec } -r > 0 \\
&= \mathbf{P}([Y=k]\cap[X=k-r]) \\
&= \mathbf{P}([Y=k])\,\mathbf{P}([X=k-r]) \\
&\quad \text{car } X, Y \text{ sont indépendantes} \\
&= a^k(1-a)\times a^{k-r}(1-a) \\
&= (1-a)^2\,a^{2k-r} \qquad (31)
\end{aligned}$$

Selon (30) et (31) :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall r \in \mathbb{Z}, \quad \mathbf{P}([M=k]\cap[V=r]) = (1-a)^2\,a^{2k+|r|}} \qquad (32)$$

(b) Introduisons le système complet d'événements de probabilités non nulles $([M=k])_{k\in\mathbb{N}}$, selon la **formule des probabilités totales** pour chaque $r \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([V=r]) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}([M=k]\cap[V=r]) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}([M=k]\cap[Y-X=r])
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (1-a)^2 \times a^{|r|} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(a^2\right)^k \\ &= \frac{(1-a)\,a^{|r|}}{1+a} \qquad (33) \end{aligned}$$

D'autre part rappelons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}([M=k]) = \left(1-a^2\right)\left(a^2\right)^k$ donc pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $r \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([M=k])\,\mathbf{P}([V=r]) &= \frac{\left(1-a^2\right)\left(a^2\right)^k (1-a)\,a^{|r|}}{1+a} \\ &= a^{2k}(1-a)^2 a^{|r|} \\ &= (1-a)^2 a^{2k+|r|} \qquad (34) \end{aligned}$$

Selon (29), (32),(33) et (34):

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall r \in \mathbb{Z}, \quad \mathbf{P}([M=k] \cap [V=r]) = \mathbf{P}([M=k])\,\mathbf{P}([V=r])$$

et donc :

$$\boxed{M \text{ et } V \text{ sont deux variables aléatoires indépendantes}}$$

21 HEC III 2002

Partie A : première approche

1. Montrons que l'application g définie par :

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t^2} & \text{si } t \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est une densité de probabilité.

- L'application g est bien définie sur $\mathbb{R}$.
- L'application g est continue sur $\mathbb{R} - \{1\}$ (à détailler : sur I, g est une fraction rationnelle dont le dénominateur est non nul sur I, sinon g coïncide avec la fonction nulle en dehors de I).
- L'application g est positive sur $\mathbb{R}$.
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g$ est impropre en $\pm\infty$.
  - L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} g$ converge puisque g est nulle en dehors de I avec $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} 0 = 0$;
  - L'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} g = \int_{1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ qui est une intégrale convergente en tant qu'**intégrale de Riemann** de paramètre $2 > 1$, avec :

$$\begin{aligned} \int_{1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} &= \lim_{A \to +\infty} \int_{1}^{M} \frac{dt}{t^2} \text{ par } \textbf{définition} \\ &= \lim_{A \to +\infty} \left[\frac{-1}{t}\right]_1^M \\ &= \lim_{A \to +\infty} 1 - \frac{1}{M} \\ &= 1 \end{aligned}$$

donc $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} g = 1$ et par la **relation de Chasles** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g = 1$.

Conclusion :

$$\boxed{g \text{ est une densité de probabilité}}$$

2. Le texte nous demande de déterminer la fonction de répartition F_X de X définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_X(t) = \mathbf{P}([X \leq t]) = \int_{-\infty}^{t} g(t)\, dt$$

Comme :

$$X(\Omega) = I = [1, +\infty[$$

– si $t < 1$:

$$\mathbf{P}([X \leq t]) = \int_{-\infty}^{t} 0 dt = 0$$

– si $t \geq 1$:

$$\mathbf{P}([X \leq t]) = \int_{-\infty}^{1} 0 dt + \int_{1}^{t} \frac{dt}{t^2} = 1 - \frac{1}{t}$$

Faisons le bilan :

$$\boxed{F_X(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{t} & \text{si } t \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

– Pour l'espérance, on étudie la convergence absolue de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)\,dt$ impropre en $\pm\infty$. Or pour tout $t \geq 1$:

$$tg(t) = \frac{1}{t}$$

dont l'intégrale diverge en $+\infty$ par **Riemann**). Par conséquent l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)\,dt$ diverge et :

$$\boxed{\text{La variable } X \text{ n'admet pas d'espérance}}$$

3. (a) Comme pour tout réel t, l'événement $[V \leq t]$ est réalisé si et seulement si $[X \leq t] \cap [Y \leq t]$ est réalisé il vient :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad [V \leq t] = [X \leq t] \cap [Y \leq t]}$$

Par **indépendance événementielle** :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{P}([V \leq t]) = \mathbf{P}([X \leq t])\,\mathbf{P}([Y \leq t])}$$

La fonction de répartition de V est donc F_V définie par :

$$\boxed{F_V(t) = \underbrace{(F_X(t))^2}_{\text{car } X \overset{\mathcal{L}}{=} Y} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 1 \\ \left(1 - \dfrac{1}{t}\right)^2 & \text{si} \quad t \geq 1 \end{cases}}$$

(b) Comme F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} - \{1\}$ (à détailler), il en est de même pour F_V. Donc V est à densité et une densité de V est $h = F_V'$ (en prenant pour h une valeur arbitraire en 1).

Conclusion :

$$\boxed{\text{La variable } V \text{ a pour densité l'application } h \longmapsto h(t) = \begin{cases} \dfrac{2(t-1)}{t^3} & \text{si } t \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

(c) On a classiquement :

$$[U > t] = [X > t] \cap [Y > t]$$

avec X et Y **indépendantes** et :

$$\begin{aligned} F_U(t) &= \mathbf{P}([U \leq t]) \\ &= 1 - \mathbf{P}([U > t]) \\ &= 1 - (\mathbf{P}([X > t]))^2 \\ &= 1 - (1 - \mathbf{P}([X \leq t]))^2 \\ &= \begin{cases} 1 - \left(1 - \left(1 - \dfrac{1}{t}\right)\right)^2 & \text{si} \quad t \geq 1 \\ 0 & \text{si} \quad t < 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{t^2} & \text{si} \quad t \geq 1 \\ 0 & \text{si} \quad t < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

On vérifie aisément que F_U est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} - \{1\}$, par suite U est une variable à densité de densité $m = F_U'$(en prenant pour m une valeur arbitraire en 1).

Conclusion :

$$m(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{t^3} & \text{si } t \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(d) ▶ **Espérance de V.**

Etudions la convergence $\displaystyle\int_1^{+\infty} t\,h(t)\,dt$, impropre en $+\infty$, puisque h coïncide avec la fonction nulle en dehors de I. Nous avons

$$h(t) = \frac{2(t-1)}{t^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{t}$$

dont l'intégrale diverge en tant qu'**intégrale de Riemann** de paramètre 1. En utilisant le **critère d'équivalence appliqué aux fonctions positives**, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} th(t)\,dt$ diverge également.

Conclusion :

$$\boxed{\text{La variable } V \text{ n'admet pas d'espérance}}$$

▶ **Espérance de U.**

Etudions la convergence $\displaystyle\int_1^{+\infty} tm(t)\,dt$, impropre en $+\infty$, puisque m coïncide avec la fonction nulle en dehors de I. Comme

$$\begin{aligned}\int_1^N tm(t)\,dt &= \int_1^N \frac{2dt}{t^2}\\ &= \left[-\frac{2}{t}\right]_1^N\\ &= 2-\frac{1}{N}\end{aligned}$$

avec :

$$\lim_{N\to+\infty} 2-\frac{1}{N} = 2$$

Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} tm(t)\,dt$ converge ainsi que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tm(t)\,dt$ égale à 2 par la **relation de Chasles**.

Conclusion :

$$\boxed{\text{La variable } U \text{ admet une espérance qui vaut } 2}$$

Partie B : situation plus générale

1. (a) Pour tout entier k de $[\![1,n]\!]$, la variable B_k la variable aléatoire prend la valeur 1 lorsque l'événement $[X_k \leq t]$ est réalisé, (c'est-à-dire lorsque le $k^{\text{ème}}$ visiteur est arrivé au plus tard à l'instant k) et la valeur 0 sinon. Ainsi la variable $Z = B_1 + \ldots + B_n$ et B_i compte le nombre total de visiteurs **indépendants** parmi les n arrivant au plus tard à l'instant t et qui ont tous la probabilité $F_X(t)$ d'y arriver. Et donc :

$$\boxed{Z \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, 1-\frac{1}{t}\right)}$$

(b) L'événement $[T_r \leq t]$ est réalisé si et seulement si le $r^{\text{éme}}$ visiteur est arrivé **au plus tard** à l'instant t, c'est à dire qu'au plus tard à t, il y a au moins r visiteurs arrivés. Donc pour t de I, $[T_r \leq t] = [Z \geq r]$ et :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([T_r \leq t]) &= \mathbf{P}([Z \geq r])\\ &= \sum_{k=r}^{n} \mathbf{P}([Z=k])\\ &= \sum_{k=r}^{n} \binom{n}{k}\left(1-\frac{1}{t}\right)^k \left(\frac{1}{t}\right)^{n-k}\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall r \in [\![1,n]\!], \quad t \in I, \text{ fixé}, \quad \mathbf{P}([T_r \leq t]) = \sum_{k=r}^{n} \binom{n}{k}\left(1-\frac{1}{t}\right)^k \left(\frac{1}{t}\right)^{n-k}}$$

2. (a) Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ on a :

$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!\,(n-k)} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)} \text{ car } k-1 \geq 0 \tag{35}$$

et :

$$(n+1-k)\binom{n}{k-1} = (n+1-k)\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} \text{ car } n-k \geq 0 \tag{36}$$

Conclusion : selon (35) et (36),

$$\boxed{\forall k \in [\![1,n]\!],\quad k\binom{n}{k} - (n+1-k)\binom{n}{k-1} = 0}$$

(b) La fonction de répartition F_r de T_r définie par :

$$F_r(t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=r}^{n} \binom{n}{k}\left(1-\frac{1}{t}\right)^k \left(\frac{1}{t}\right)^{n-k} & \text{si } t \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est continue sur $]-\infty,1[$ et sur $[1,+\infty[$ et $\lim\limits_{t\to 1^-} F_r(t) = 0$ alors que :

$$F_r(1) = \sum_{k=r}^{n} \binom{n}{k} 0^k = 0$$

car $r \geq 1$ ($r^{\text{ème}}$ visiteur). De plus F_r est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}-\{1\}$ donc T_r est une **variable à densité** et une densité de Z est F_r', notée f_r nulle en dehors de I et par dérivation d'un produit sur I :

$$\begin{aligned}
F_r'(t) &= \sum_{k=r}^{n}\left[\binom{n}{k}k\left(1-\frac{1}{t}\right)^{k-1}\frac{1}{t^2}\left(\frac{1}{t}\right)^{n-k} - \binom{n}{k}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{k}(n-k)\left(\frac{1}{t}\right)^{n-k-1}\frac{1}{t^2}\right] \\
&= \sum_{k=r}^{n}\binom{n}{k}k\left(1-\frac{1}{t}\right)^{k-1}\frac{1}{t^2}\left(\frac{1}{t}\right)^{n-k} - \sum_{k=r}^{n}\binom{n}{k}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{k}(n-k)\left(\frac{1}{t}\right)^{n-k-1}\frac{1}{t^2}
\end{aligned}$$

en réindexant la seconde somme par $k = h-1$ soit $h = k+1$ pour faire apparaître les coefficients binomiaux du **2.a**

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=r}^{n}\binom{n}{k}k\left(1-\frac{1}{t}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{t}\right)^{n-k+2} - \sum_{h=r+1}^{n+1}\binom{n}{h-1}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{h-1}\underbrace{(n-h+1)}_{=0 \text{ pour } h=n+1}\left(\frac{1}{t}\right)^{n-h+2} \\
&= \sum_{k=r}^{n}\binom{n}{k}k\left(1-\frac{1}{t}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{t}\right)^{n-k+2} - \sum_{h=r+1}^{n}\binom{n}{h-1}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{h-1}(n-h+1)\left(\frac{1}{t}\right)^{n-h+2} \\
&= \sum_{k=r}^{n}\binom{n}{k}k\left(1-\frac{1}{t}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{t}\right)^{n-k+2} - \sum_{h=r+1}^{n}h\binom{n}{h}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{h-1}\left(\frac{1}{t}\right)^{n-h+2} \\
&= r\binom{n}{r}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{r-1}\left(\frac{1}{t}\right)^{n-r+2} + 0 \text{ par } \textbf{télescopage}
\end{aligned}$$

Conclusion : pour tout entier r de l'intervalle $[\![1,n]\!]$, la variable aléatoire T_r admet pour densité l'application f_r définie par

$$\boxed{f_r(t) = \begin{cases} r\dbinom{n}{r}\left(\dfrac{1}{t}\right)^{n+2-r}\left(1-\dfrac{1}{t}\right)^{r-1} & \text{si } t \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

(c) Comme :

$$\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{r-1}=1$$

il vient alors :

$$tf_r(t)\underset{t\to+\infty}{\sim} r\binom{n}{r}\left(\frac{1}{t}\right)^{n+1-r}$$

Or l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t}\right)^{n+1-r}dt$ converge en tant qu'**intégrale de Riemann** si et seulement si $n+1-r>1$ ce qui équivaut à $r<n$. Et par le **critère d'équivalence appliqué aux fonctions positives**, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t\ f_r(t)\,dt$ converge si, et seulement si, $r<n$.

La variable T_r admet donc une espérance pour $r<n$ et pas pour $r=n$.

Conclusion :

$$\boxed{\text{Les variables } T_1, T_2, \ldots, T_{n-1} \text{ admettent une espérance alors que } T_n \text{ n'en admet pas}}$$

3. (a) On a pour tout couple (p,q) d'entiers naturels :

$$J(p,q+1)=\int_0^1 x^p(1-x)^{q+1}\,dx$$

Soit :

$$\begin{cases} u'(t)=x^p & \Longleftarrow \quad u(t)=\dfrac{1}{p+1}x^{p+1}\\ v(t)=(1-x)^{q+1} & \Longrightarrow \quad v'(t)=-(q+1)(1-x)^q\end{cases}$$

avec u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ (puissances positives). Donc :

$$J(p,q+1)=\left[\frac{1}{p+1}x^{p+1}(1-x)^{q+1}\right]_0^1-\int_0^1\frac{-1}{p+1}x^{p+1}(q+1)(1-x)^q dx=\frac{q+1}{p+1}\int_0^1 x^{p+1}(1-x)^q dx$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall (p,q)\in\mathbb{N}^2,\quad (p+1)\ J(p,q+1)=(q+1)\ J(p+1,q)}$$

(b) On a pour tout entier naturel q :

$$\begin{aligned} J(0,q) &= \int_0^1(1-x)^q\,dx\\ &= \left[\frac{-1}{q+1}(1-x)^{q+1}\right]_0^1\\ &= \frac{1}{q+1}\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall q\in\mathbb{N},\quad J(0,q)=\frac{1}{q+1}}$$

(c) Soit la proposition $\mathcal{P}_p$:

$$\text{“}\forall q\in\mathbb{N},\quad J(p,q)=\frac{p!\,q!}{(1+p+q)!}\text{”}$$

Montrons que $\mathcal{P}_p$ est vraie pour tout entier naturel p.

– Pour $p=0$, on a pour tout q entier

$$J(0,q)=\frac{1}{q+1}=\frac{0!\,q!}{(1+q)!}$$

et $\mathcal{P}_0$ est vérifiée.

– Supposons $\mathcal{P}_p$ vraie, pour p fixé dans $\mathbb{N}$. Or selon la relation de récurrence de la question précédente :

$$\begin{aligned} J(p+1,q) &= \frac{p+1}{q+1} J(p,q+1) \\ &= \frac{p!\,(q+1)!}{(1+p+q+1)!}\frac{p+1}{q+1} \\ &= \frac{(p+1)!\,q!}{(1+p+1+q)!} \end{aligned}$$

Donc pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_p$ entraîne $\mathcal{P}_{p+1}$. Ce raisonnement par récurrence montre que :

$$\boxed{\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \quad J(p,q) = \frac{p!\,q!}{(1+p+q)!}}$$

4. Soit r un entier de l'intervalle $[\![1, n-1]\!]$.

(a) Si a est un réel strictement supérieur à 1. Posons le changement de variable $t(x) = \dfrac{1}{x}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et bijectif sur le segment $[1,a]$ à valeurs dans $\left[1, \dfrac{1}{a}\right]$, alors $dt = -\dfrac{1}{x^2}dx$ avec $t = 1$ ce qui équivaut à $x = 1$ et $t = a$ équivalent à $x = \dfrac{1}{a}$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} \int_1^a t\,f_r(t)\,dt &= \int_1^{1/a} \frac{1}{x} f_r\left(\frac{1}{x}\right)\frac{-1}{x^2}dx \\ &= \int_{1/a}^1 \frac{1}{x^3}\left(r\binom{n}{r}x^{n+2-r}(1-x)^{r-1}\right)dx \text{ car } \frac{1}{x} \geq 1 \\ &= \int_{1/a}^1 r\binom{n}{r}x^{n-1-r}(1-x)^{r-1}dx \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\int_1^a t\,f_r(t)\,dt = r\binom{n}{r}\int_{1/a}^1 x^{n-1-r}(1-x)^{r-1}dx}$$

(b) La variable aléatoire T_r admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t\,f_r(t)\,dt$ est convergente par définition de f_r nulle en dehors de I. En cas d'existence $\mathbf{E}(T_r) = \displaystyle\int_1^{+\infty} t\,f_r(t)\,dt$ par **Chasles**.

$$\lim_{a\to+\infty}\int_1^a t\,f_r(t)\,dt = \lim_{a\to+\infty}\int_{1/a}^1 x^{n-1-r}(1-x)^{r-1}dx = J(n-1-r, r-1)$$

par **définition** de la convergence de l'intégrale car $n-1-r \geq 0$ et $r-1 \geq 0$ ($r \in [\![1, n-1]\!]$). Finalement la variable T_r admet une espérance égale à :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(T_r) &= r\binom{n}{r}\frac{(n-r-1)!\,(r-1)!}{(1+n-r-1+r-1)!} \\ &= r\frac{n!}{r!\,(n-r)!}\frac{(n-r-1)!\,(r-1)!}{(n-1)!} \\ &= \frac{n}{n-r} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall r \in [\![1, n-1]\!] \quad \mathbf{E}(T_r) = \frac{n}{n-r}}$$

22 HEC III 1996

1. (a) Tout d'abord $\Omega = \mathcal{P}(E)$, par suite $\text{Card}\,(\Omega) = \text{Card}\,(\mathcal{P}(E)) = 2^m$. Soit U l'événement : "la boule portant le numéro 1 appartient à l'ensemble de boules tirées". Ainsi $\text{Card}\,(U) = 1 \times 2^{m-1}$ car un élément de U est une **partie** de E comportant la boule avec le numéro 1 (un seul choix) et k boules de $E - \{1\}$ avec $k \in [\![0, m-1]\!]$ (2^{m-1} choix), le **lemme des bergers** parachevant le tout. Comme nous pouvons imaginer que les parties de E consituées de boules sont tirées au **hasard**, nous muniront l'univers de la **probabilité uniforme** et par l'**identité de Laplace** :

$$\boxed{\mathbf{P}\,(U) = \frac{2^{m-1}}{2^m} = \frac{1}{2}}$$

Intuitivement la réponse est logique, car on a une chance sur deux que le numéro 1 soit dans la partie tirée.

(b) Montrons que pour toute partie J non vide de $[\![1, m]\!]$, $\mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{i\in J} A_i\right) = \prod\limits_{i\in J} \mathbf{P}\,(A_i)$, autrement dit montrons que :

$$\forall k \in [\![1, m]\!], \quad \mathbf{P}\,(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \prod_{j=1}^{k} \mathbf{P}\left(A_{i_j}\right)$$

L'événement $A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}$ est réalisé si et seulement si les boules numérotées $i_1, i_2, \ldots, i_k$ sont éléments de la partie tirée, complétées par l boules dont les numéros appartiennent à l'ensemble $E - \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ et où $l \in [\![0, m-k]\!]$, alors :

$$\forall k \in [\![1, m]\!], \quad \mathbf{P}\,(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \frac{2^{m-k}}{2^m} \tag{37}$$

Enfin en reprenant les mêmes explications qu'à la **question 1.a** :

$$\forall j \in [\![1, k]\!], \quad \mathbf{P}\left(A_{i_j}\right) = \frac{1}{2}$$

donc :

$$\prod_{j=1}^{k} \mathbf{P}\left(A_{i_j}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^k \tag{38}$$

Conclusion : selon (37) et (38),

$$\boxed{\text{Les événements } A_i,\ 1 \le i \le m, \text{ sont mutuellement indépendants}}$$

(c) Notons X la variable aléatoire égale au nombre de boules qui ont été tirées.
– $X\,(\Omega) = [\![0, m]\!]$;
– Pour tout $k \in X\,(\Omega)$,

$$\mathbf{P}\,([X = k]) = \frac{\binom{m}{k}}{2^m}$$

car $\binom{m}{k}$ représente le nombre de choix possibles d'une partie de k éléments de E et $\text{Card}\,(\mathcal{P}\,(E)) = 2^m$.
Par conséquent, en "retravaillant" un peu l'expression de la probabilité sous la forme

$$\binom{m}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{m-k}$$

nous pouvons conclure que :

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(m, \frac{1}{2}\right)}$$

Dans ce cas, d'après le cours :

$$\boxed{\mathbf{E}\,(X) = \frac{m}{2} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}\,(X) = \frac{m}{4}}$$

(d) Intuitivement la réponse est **non**, car lorsqu'on tire k boules de l'urne, on une chance sur deux que k soit pair et une chance sur deux que k soit impair. Prouvons cette intuition par le calcul maintenant. Notant A l'événement “on tire un nombre pair de boules”, dans ce cas

$$A = \biguplus_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} [X = 2k]$$

et par $\sigma-$**additivité de P** :

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \mathbf{P}([X = 2k]) = \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \frac{1}{2^m} \binom{m}{2k}$$

De même, en notant B l'événement "on tire un nombre impair de boules", dans ce cas :

$$B = \biguplus_{k=0}^{\lfloor (m-1)/2 \rfloor} [X = 2k+1]$$

et par $\sigma-$**additivité de P** :

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{k=0}^{\lfloor (m-1)/2 \rfloor} \mathbf{P}([X = 2k+1]) = \sum_{k=0}^{\lfloor (m-1)/2 \rfloor} \frac{1}{2^m} \binom{m}{2k+1}$$

Or, pour tout réel x et pour tout entier m supérieur ou égal à deux et par la formule du binôme de Newton :

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \binom{m}{2k} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor (m-1)/2 \rfloor} \binom{m}{2k+1} x^{2k+1}$$

En particulier, respectivement pour $x = 1$ et pour $x = -1$, nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \binom{m}{2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor (m-1)/2 \rfloor} \binom{m}{2k+1} = 2^m \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \binom{m}{2k} - \sum_{k=0}^{\lfloor (m-1)/2 \rfloor} \binom{m}{2k+1} = 0 \end{cases}$$

ce qui entraîne que :

$$\sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \binom{m}{2k} = \sum_{k=0}^{\lfloor (m-1)/2 \rfloor} \binom{m}{2k+1} = 2^{m-1}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = \frac{1}{2}}$$

2. (a) Notons pour tout entier i de $[\![1, m]\!]$, p_i la probabilité que la boule numéro i soit tirée pour la première fois au $k^{\text{ème}}$ tirage et pour tout entier naturel non nul j, l'événement I_j "la boule numéro i est tirée au $j^{\text{ème}}$ tirage". Par suite pour tout $i \in [\![1, m]\!]$:

$$p_i = \mathbf{P}\left(\overline{I_1} \cap \overline{I_2} \cap \ldots \cap \overline{I_{k-1}} \cap I_k\right)$$

les événements sont indépendants car les tirages sont effectués avec remise, alors :

$$\boxed{p_i = \left(\prod_{j=1}^{k-1} \mathbf{P}\left(\overline{I_j}\right)\right) \mathbf{P}(I_k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^k}$$

en reprenant le même raisonnement qu'au **1.a.** et **1.b.**

(b) Vous comprendrez bien sans difficulté que pour tout entier naturel $i \in [\![1, m]\!]$, $T_i \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ puisque la variable correspond à un **temps d'attente du premier succès** (tirer la boule i). Il n'y a qu'à citer son cours pour affirmer que :

$$\boxed{\forall i \in [\![1, m]\!], \quad \mathbf{E}(T_i) = 2}$$

(c) L'événement $[T = k]$, pour tout entier k non nul, est réalisé si, et seulement si au $k^{\text{ème}}$ tirage chacune des boules a été obtenue au moins une fois. Le contexte de l'énoncé nous amène à penser qu'il faut trouver une relation entre les variables T_i, $i \in [\![1, m]\!]$.
Cela donne $T = \sup(T_1, T_2, \ldots, T_m)$ et, classiquement pout tout entier naturel k non nul :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([T \leq k]) &= \mathbf{P}([T_1 \leq k] \cap \ldots \cap [T_m \leq k]) \\
&= \prod_{i=1}^{m} \mathbf{P}([T_i \leq k]) \\
&= \prod_{i=1}^{m} (1 - \mathbf{P}([T_i > k])) \\
&= \prod_{i=1}^{m} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right) \\
&\quad \text{car l'événement } [T_i > k] \text{ est réalisé si, et seulement si les} \\
&\quad k \text{ premiers ne donnent que des échecs } \heartsuit \\
&= \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right)^m
\end{aligned}$$

Enfin pour tout entier naturel non nul k,

$$\mathbf{P}([T = k]) = \mathbf{P}([T \leq k]) - \mathbf{P}([T \leq k-1])$$

nous avons donc :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}([T = k]) = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right)^m - \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right)^m}$$

Nous avons bien vérifié que la formule reste valable pour $k = 1$, car $\mathbf{P}([T \leq 0]) = 0$ ce que nous retrouvons, quand $k = 1$ dans $\left(1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}\right)^m$.

3. (a) Il y a deux possibilités, soit tirer les boules dès le premier tirage, soit en exactement deux tirages. Détaillons ...
   - La probabilité de tirer les m boules en un seul tirage vaut $\dfrac{1}{2^m}$ car il n'y a qu'**une seule partie** de E qui soit E justement.
   - Tirer les m boules en exactement deux tirages, c'est tirer l boules au premier tirage avec $l \in [\![0, m-1]\!]$ et $m - l$ au second. La probabilité de cette situation vaut :

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{m-1} \frac{1}{2^m}\binom{m}{l} \times \frac{1}{2^{m-l}}\binom{m-l}{m-l} &= \sum_{l=0}^{m-1} \frac{1}{2^{2m-l}}\binom{m}{l} \text{ car } \binom{m-l}{m-l} = 1 \\
&= \frac{1}{2^{2m}} \sum_{l=0}^{m-1} \binom{m}{l} 2^l \\
&= \frac{1}{2^{2m}} \left(\sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} 2^l - \binom{m}{m} 2^m\right) \\
&= \frac{1}{2^{2m}} (3^m - 2^m) \text{ selon le binôme}
\end{aligned}$$

Explications :

– $\dfrac{1}{2^m}\dbinom{m}{l}$ représente la probabilité de tirer l boules au premier tirage parmi m ;

– $\dfrac{1}{2^{m-l}}\dbinom{m-l}{m-l}$ est la probabilité de tirer les $m-l$ boules restantes.

La probabilité de tirer les boules en exactement les m boules en deux tirages est :

$$\boxed{\frac{1}{2^m}+\frac{1}{2^{2m}}\left(3^m-2^m\right)=\left(\frac{3}{4}\right)^m}$$

La probabilité que les m boules soient tirées en exactement deux tirages est :

$$\boxed{\frac{1}{2^{2m}}\left(3^m-2^m\right)}$$

(b) Reprenons les résultats précédents pour essayer de **conjecturer**. Nous avons, en notant pour tout entier k non nul $P_{k,m}$ la probabilité demandée :

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{2^m}=\frac{1}{\left(2^1\right)^m}=\left(1-\frac{1}{2}\right)^m \\ P_2 &= \left(\frac{3}{4}\right)^m=\left(\frac{3}{2^2}\right)^m=\left(\frac{4-1}{2^2}\right)^m=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)^m \end{aligned}$$

Nous pouvons donc **conjecturer** (hypothèse $\mathcal{P}(k)$) que :

$$P_k=\left(1-\frac{1}{2^k}\right)^m$$

ce que nous poserons par hypothèse, pour k fixé dans $\mathbb{N}^*$. Montrons que :

$$P_{k+1,m}=\left(1-\frac{1}{2^{k+1}}\right)^m$$

Nous avons les égalités successives :

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= \sum_{l=0}^{m}\frac{1}{2^m}\binom{m}{l}P_{k,m-l} \\ & \quad \text{où } \frac{1}{2^m}\binom{m}{l} \text{ représente la probabilité d'obtenir } i \text{ boules au premier tirage} \\ & \quad \text{et } P_{k,m-l} \text{ celle d'obtenir en au plus } k \text{ tirages les } m-l \text{ boules restantes} \\ &= \sum_{l=0}^{m}\frac{1}{2^m}\binom{m}{l}\left(1-\frac{1}{2^k}\right)^{m-l} \quad \text{par hypothèse} \\ &= \frac{1}{2^m}\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}\left(1-\frac{1}{2^k}\right)^{m-l} \\ &= \frac{1}{2^m}\left(2-\frac{1}{2^k}\right)^m \quad \text{selon le binôme de Newton} \\ &= \left(\frac{2}{2}-\frac{1}{2^{k+1}}\right)^m \\ &= \left(1-\frac{1}{2^{k+1}}\right)^m \end{aligned}$$

Ainsi pour tout entier k non nul $\mathcal{P}(k)$ entraîne que $\mathcal{P}(k+1)$ et la proposition est donc **héréditaire.**

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad P_{k,m}=\left(1-\frac{1}{2^k}\right)^m}$$

23 HEC III 1992

1. (a) Le comptage du nombre de véhicules en état de panne correspond à une succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.
Conclusion :
$$\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)}$$
Autrement dit :
$$\boxed{X(\Omega) = [\![0,n]\!], \quad \forall k \in [\![0,n]\!], \quad \mathbf{P}([X=k]) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$$

(b) D'après le cours :
$$\boxed{\mathbf{E}(Y) = np}$$
Par linéarité de l'espérance (existence acquise) :
$$\mathbf{E}((Y-1)Y) = \mathbf{E}\left(Y^2\right) - \mathbf{E}(Y)$$
Or :
$$\mathbf{V}(Y) = \mathbf{E}\left(Y^2\right) - (\mathbf{E}(Y))^2$$
donc :
$$\begin{aligned} \mathbf{E}((Y-1)Y) &= \mathbf{V}(Y) + (\mathbf{E}(Y))^2 - \mathbf{E}(Y) \\ &= np(1-p) + (np)^2 - np \\ &= np^2(n-1) \end{aligned}$$
Conclusion :
$$\boxed{\mathbf{E}((Y-1)Y) = np^2(n-1)}$$
D'autre part :
$$\begin{aligned} \mathbf{E}((Y-2)(Y-1)Y) &= \sum_{k=0}^{n} (k-2)(k-1)k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &\quad \text{selon le théorème de transfert} \\ &= \sum_{k=3}^{n} (k-2)(k-1)k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \ \text{ pour } n \geq 3 \\ &= \sum_{k=3}^{n} (n-2)(n-1)n\binom{n-3}{k-3} p^k (1-p)^{n-k} \\ &\quad \text{par propriété des coefficients binomiaux} \\ &= (n-2)(n-1)n\sum_{k=3}^{n} \binom{n-3}{k-3} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= (n-2)(n-1)n\sum_{k=0}^{n-3} \binom{n-3}{k} p^{k+3} (1-p)^{(n-3)-k} \\ &= (n-2)(n-1)np^3\sum_{k=0}^{n-3} \binom{n-3}{k} p^{k} (1-p)^{(n-3)-k} \\ &= (n-2)(n-1)np^3 \text{ selon la formule du binôme} \end{aligned} \tag{39}$$
Enfin pour $n \in \{1,2\}$, $\mathbf{E}((Y-2)(Y-1)Y) = 0$ ce que l'on retrouve dans l'expression (39).
Conclusion :
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{E}((Y-2)(Y-1)Y) = (n-2)(n-1)np^3}$$
Enfin :
$$\frac{\mathbf{E}((Y-1)Y)}{\mathbf{E}((n-1)Y)} = \frac{np^2(n-1)}{(n-1)np} = p$$

et :

$$\frac{\mathbf{E}\left(\left(Y-2\right)\left(Y-1\right)Y\right)}{\mathbf{E}\left(\left(n-2\right)\left(n-1\right)Y\right)}=\frac{\left(n-2\right)\left(n-1\right)np^3}{\left(n-2\right)\left(n-1\right)np}=p^2$$

Conclusion :

$$\boxed{\frac{\mathbf{E}\left(\left(Y-1\right)Y\right)}{\mathbf{E}\left(\left(n-1\right)Y\right)}\quad\text{et}\quad\frac{\mathbf{E}\left(\left(Y-2\right)\left(Y-1\right)Y\right)}{\mathbf{E}\left(\left(n-2\right)\left(n-1\right)Y\right)}\quad\text{sont bien indépendants de } p}$$

2. Nous avons :

$$\boxed{Y=\sum_{i=1}^{n}X_i}$$

puisque le nombre de 1 dans la somme correspond au nombre de véhicules en panne le jour J les autres termes étant nuls, ce qui est exactement égal à Y.

3. (a) Déterminons la loi de X_iX_j pour $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$ avec $i\neq j$ où X_i et X_j sont indépendantes. Nous avons :
   - Pour tout couple $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $i\neq j$, $X_iX_j\left(\Omega\right)=\{0,1\}$.
   - Pour tout couple $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$ avec $i\neq j$:

$$\mathbf{P}\left([X_iX_j=1]\right)=\mathbf{P}\left([X_i=1]\right)\mathbf{P}\left([X_j=1]\right)=p^2 \text{ car } X_i \text{ et } X_j \text{ sont indépendantes}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall\,(i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\quad i\neq j,\quad X_iX_j\hookrightarrow\mathcal{B}\left(p^2\right)}$$

et :

$$\boxed{\forall\,(i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\quad i\neq j,\quad \mathbf{E}\left(X_iX_j\right)=p^2}$$

(b) Signalons que Z est le nombre de paires de deux voitures entièrement disponibles. Mais attention une même voiture peut apparaître dans plusieurs paires et donc les variables X_iX_j ne sont **pas indépendantes** mais cela n'est pas gênant pour le calcul de l'espérance de Z qui existe, car les variables X_iX_j sont bernoulliennes avec :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(Z\right)&=\sum_{\{i,j\}\in A}\mathbf{E}\left(X_iX_j\right)\\&=\sum_{\{i,j\}\in A}p^2\\&=p^2\sum_{\{i,j\}\in A}1\\&=p^2\left|A\right|\\&=p^2\binom{n}{2}\\&\quad\text{car } A \text{ est un ensemble de paires soit un}\\&\quad\text{ensemble de parties constituées de deux éléments}\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{E}\left(Z\right)=\frac{n\left(n-1\right)p^2}{2}}$$

(c) Rappelons tout d'abord que $Y=\sum_{i=1}^{n}X_i$ donc $Y^2=\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2$ soit :

$$\begin{aligned}Y^2&=\sum_{i=1}^{n}X_i^2+2\sum_{1\leq i<j\leq n}X_iX_j\\&=\sum_{i=1}^{n}X_i^2+2Z\\&=\sum_{i=1}^{n}X_i+2Z\quad\text{car les variables } X_i \text{ sont bernoulliennes}\\&=Y+2Z\end{aligned}$$

En effet pour tout i de $[\![1,n]\!]$, et pour tout $\omega \in X(\Omega)$:

$$(X_i(\omega)=0) \iff (X_i^2(\omega)=0 \quad \text{et} \quad X_i(\omega)=1) \iff \left(X_i^2(\omega)=1\right)$$

Donc :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad X_i = X_i^2$$

Notez bien que ce résultat se généralise par récurrence.
Conclusion :

$$\boxed{Y^2 = Y + 2Z} \tag{40}$$

D'après (40), par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Z) &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}\left(Y^2\right) - \mathbf{E}(Y)\right) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\mathbf{V}(Y) + (\mathbf{E}(Y))^2 - \mathbf{E}(Y)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(np(1-p) + (np)^2 - np\Big) \\
&= \frac{1}{2}np^2(n-1)
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{E}(Z) = \frac{1}{2}np^2(n-1)}$$

et nous retrouvons bien le résultat de **3.b.**

(d) Par théorème :

$$\operatorname{Cov}(Y,Z) = \mathbf{E}(YZ) - \mathbf{E}(Y)\,\mathbf{E}(Z) = \mathbf{E}(YZ) - np \times \frac{1}{2}np^2(n-1)$$

Calculons maintenant $\mathbf{E}(YZ)$. Nous avons l'implication :

$$\left(Y^2 = Y + 2Z\right) \Longrightarrow \left(Y^3 = Y^2 + 2ZY\right)$$

et par linéarité de l'espérance :

$$\mathbf{E}\left(Y^3\right) = \mathbf{E}\left(Y^2\right) + 2\mathbf{E}(ZY)$$

soit :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(ZY) &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}\left(Y^3\right) - \mathbf{E}\left(Y^2\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\mathbf{E}(Y(Y-1)(Y-2) + 3Y(Y-1) + Y) - \mathbf{V}(Y) - (\mathbf{E}(Y))^2\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\mathbf{E}(Y(Y-1)(Y-2)) + 3\mathbf{E}(Y(Y-1)) + \mathbf{E}(Y) - \mathbf{V}(Y) - (\mathbf{E}(Y))^2\Big) \\
&\quad \text{par linéarité de } \mathbf{E} \\
&= \frac{1}{2}\left((n-2)(n-1)np^3 + 3np^2(n-1) + np - np(1-p) - n^2p^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left((n-2)(n-1)np^3 + 3np^2(n-1) + np - np(1-p) - n^2p^2\right) \\
&= \frac{1}{2}np^2(n-1)(-2p+np+2)
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(Y,Z) &= \frac{1}{2}np^2(n-1)(-2p+np+2) - \frac{1}{2}n^2p^3(n-1) \\
&= -np^2(p-1)(n-1) \\
&= np^2(1-p)(n-1)
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\operatorname{Cov}(Y,Z) = np^2(n-1)(1-p)}$$

4. (a) Loi de X'_i pour $i \in [\![1,n]\!]$. Nous avons pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $X'_i(\Omega) = \{0,1\}$ et selon la **formule des probabilités totales** associée au système complet d'événements $\{[X_i = 0], [X_i = 1]\}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([X'_i = 1]) &= \mathbf{P}_{[X_i=0]}([X'_i = 1])\,\mathbf{P}([X_i = 0]) + \mathbf{P}_{[X_i=1]}([X'_i = 1])\,\mathbf{P}([X_i = 1]) \\ &= 1 \times (1-p) + (1-\alpha)\,p \\ &\quad \text{selon les données de l'énoncé} \\ &\quad \text{(je parle des probabilités conditionnelles)} \\ &= 1 - \alpha p\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!], \quad X'_i \hookrightarrow \mathcal{B}(1-\alpha p)}$$

Loi de Y'. Nous avons $Y' = \sum_{i=1}^{n} X'_i$ (même raisonnement qu'au **2.**) où les n variables X'_i sont indépendantes de même paramètre $1 - \alpha p$ donc d'après le célèbre résultat du cours :

$$\boxed{Y' \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1-\alpha p)}$$

(b) D'après le cours, nous savons que :

$$\mathbf{E}(Y') = n(1-\alpha p) \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(Y) = np$$

Comme $\alpha \in]0,1[$ et $p < 1/2$ alors $1 - \alpha p > 1/2$ et comme $n > 0$:

$$n(1-\alpha p) > \frac{n}{2} > np$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{E}(Y') > \mathbf{E}(Y)}$$

(c) Si $\alpha = \frac{1}{10}$ alors :

$$\begin{aligned} &(\mathbf{E}(Y') > \mathbf{E}(Y)) \\ \iff &(np = n(1-\alpha p)) \\ \iff &\left(p = \frac{1}{1+\alpha}\right)\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{p = \frac{10}{11}}$$

✠✠✠✠✠

24 EDHEC 1997

Dans ce problème n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

Partie I

1. Dans le cas minimum nous pouvons obtenir deux fois le **même numéro** et ce dès le début des tirages. Et au plus tard les n premiers tirages donnent les n **numéros différents** et le $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage donnera forcément un des n numéros déjà obtenu.
Conclusion :
$$\boxed{N(\Omega) = [\![2, n+1]\!]}$$

2. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'événement $[N > k]$ est réalisé si et seulement si les k premiers tirages constituent une **liste sans répétition de longueur** k ($k-$ arrangement) constituée de numéros de $[\![1, n]\!]$. Il y a n^k façons de tirer k boules **avec remise** à chaque fois. Comme les boules sont **équiprobables** à chaque tirage, nous utiliserons le **relation de Laplace :**
$$\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \mathbf{P}\left([N > k]\right) = \frac{A_n^k}{n^k}} \tag{41}$$

3. (a) Le raisonnement est ultra-classique et à savoir reproduire parfaitement.
$$\forall k \in [\![2, n]\!], \quad [N \geq k] = [N > k] \biguplus [N = k]$$
Par $\sigma-$**additivité de P** :
$$\forall k \in [\![2, n]\!], \quad \mathbf{P}\left[N \geq k\right] = \mathbf{P}\left([N > k]\right) + \mathbf{P}\left([N = k]\right)$$
ce qui équivaut à dire que :
$$\boxed{\forall k \in [\![2, n]\!], \quad \mathbf{P}(N = k) = \mathbf{P}([N > k-1]) - \mathbf{P}([N > k])}$$

(b) Nous avons :
$$\mathbf{P}\left([N = n+1]\right) = \mathbf{P}\left([N > n]\right) = \frac{A_n^n}{n^n} = \frac{n!}{n^n}$$
et pour tout entier naturel $k \in [\![2, n]\!]$:
$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left([N = k]\right) &= \frac{A_n^{k-1}}{n^{k-1}} - \frac{A_n^k}{n^k} \\
&= \frac{nA_n^{k-1} - A_n^k}{n^k} \\
&= \frac{n\left(n \times \cdots \times (n - (k-1) + 1)\right) - n \times \cdots \times (n-k+1)}{n^k} \\
&= \frac{n \times \cdots \times (n-k+2)\left(n - (n-k+1)\right)}{n^k} \\
&= \frac{n \times \cdots \times (n-k+2)(k-1)}{n^k} \\
&= \frac{(k-1)\, A_n^{k-1}}{n^k}
\end{aligned}$$
Conclusion :
$$\boxed{\mathbf{P}\left([N = k]\right) = \begin{cases} \dfrac{(k-1)\, A_n^{k-1}}{n^k} & \text{si} \quad k \in [\![2, n]\!] \\ \dfrac{n!}{n^n} & \text{si} \quad k = n+1 \end{cases}}$$

4. Comme N est une variable **finie**, elle admet une espérance égale, par définition, à :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(N) &= \sum_{k=2}^{n+1} k\mathbf{P}([N=k]) \\
&= \sum_{k=2}^{n} k\mathbf{P}([N=k]) + (n+1)\mathbf{P}([N=n+1]) \\
&= \sum_{k=2}^{n} k\left(\mathbf{P}([N>k-1]) - \mathbf{P}([N>k])\right) + (n+1)\mathbf{P}([N=n+1]) \\
&= \sum_{k=2}^{n} k\mathbf{P}([N>k-1]) - \sum_{k=2}^{n} k\mathbf{P}([N>k]) + (n+1)\mathbf{P}([N=n+1]) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)\mathbf{P}([N>k]) - \sum_{k=2}^{n} k\mathbf{P}([N>k]) + (n+1)\mathbf{P}([N=n+1]) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} k\mathbf{P}([N>k]) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}([N>k]) - \sum_{k=2}^{n} k\mathbf{P}([N>k]) + (n+1)\mathbf{P}([N=n+1]) \\
&= \mathbf{P}([N>1]) + \underbrace{\sum_{k=2}^{n-1} k\mathbf{P}([N>k]) - \sum_{k=2}^{n} k\mathbf{P}([N>k])}_{\text{somme télescopique}} + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}([N>k]) + (n+1)\mathbf{P}([N=n+1]) \\
&= \mathbf{P}([N>1]) - n\mathbf{P}([N>n]) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}([N>k]) + (n+1)\mathbf{P}([N=n+1]) \\
&= 1 - n\mathbf{P}([N>n]) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}([N>k]) + (n+1)\mathbf{P}([N>n]) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}([N>k]) + \mathbf{P}([N>n]) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}([N>k]) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{A_n^k}{n^k} \text{ selon } (41) \\
&= \frac{A_n^0}{n^0} + \sum_{k=1}^{n} \frac{A_n^k}{n^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{A_n^k}{n^k}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{E}(N) = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_n^k}{n^k}}$$

Partie II

Je vous conseille de consommer cette partie sans aucune modération. A bon entendeur ...

1. Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+$, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ avec $F' = f$ sur $\mathbb{R}_+$ et $t \longmapsto t$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. Bref nous pouvons **intégrer par parties** en posant :

$$\begin{array}{lcl}
(u(t) = t) & \Longrightarrow & (u'(t) = 1) \\
(v'(t) = f(t)) & \Longleftarrow & (v(t) = F(t) - 1) \text{ (ruse)}
\end{array}$$

Par conséquent, pour tout réel x positif :

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \int_0^x t f(t)\,dt \\
&= \left[t\,(F(t)-1)\right]_0^x - \int_0^x (F(t)-1)\,dt \\
&= x\,(F(x)-1) - \int_0^x (F(t)-1)\,dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x\left(\mathbf{P}\left([X \leq x]\right) - 1\right) - \int_0^x \left(F(t) - 1\right) dt \\
&= -x\left(1 - \mathbf{P}\left([X \leq x]\right)\right) - \int_0^x \left(F(t) - 1\right) dt \\
&= -x\mathbf{P}\left([X > x]\right) - \int_0^x \left(F(t) - 1\right) dt \\
&= -x\mathbf{P}\left([X > x]\right) + \int_0^x \left(1 - F(t)\right) dt
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi(x) = \int_0^x \left(1 - F(t)\right) dt - x\mathbf{P}\left([X > x]\right)} \tag{42}$$

2. (a) La fonction φ est l'**unique primitive** sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $t \longmapsto tf(t)$ et s'**annulant en** 0. Ainsi **par définition**, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ donc dérivable sur $\mathbb{R}_+$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi'(x) = xf(x) \geq 0$$

La fonction φ est donc **croissante** sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Selon (42) pour tout réel x positif :

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \int_0^x \left(1 - F(t)\right) dt - x\mathbf{P}\left([X > x]\right) \\
&\leq \int_0^x \left(1 - F(t)\right) dt \text{ car } x\mathbf{P}\left([X > x]\right) \geq 0 \\
&\leq \int_0^{+\infty} \left(1 - F(t)\right) dt
\end{aligned}$$

car l'intégrande est **positive** et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 - F(t)\right) dt$ **converge**

Conclusion :

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est majorée et croissante donc } \lim_{+\infty} \varphi \text{ existe et est finie, } X \text{ admet donc une espérance}}$$

♥ **PS : n'oubliez pas que X étant une variable positive, son espérance vaut, en cas d'existence,**

$$\mathbf{E}(X) = \int_0^{+\infty} xf(x)\, dx$$

(c) Pour tout réel positif x, nous pouvons écrire que :

$$\boxed{0 \leq x\mathbf{P}\left([X > x]\right) = \int_x^{+\infty} xf(t)\, dt \leq \int_x^{+\infty} tf(t)\, dt}$$

car si $t \in [x, +\infty[$, $x \geq t$.

(d) Par la **relation de Chasles**, pour tout réel positif x :

$$\int_x^{+\infty} tf(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\, dt - \int_{-\infty}^{x} tf(t)\, dt = \mathbf{E}(X) - \int_{-\infty}^{x} tf(t)\, dt$$

avec :
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(X)$;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} tf(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\, dt = \mathbf{E}(X)$ par convergence de l'intégrale, puisque X admet une espérance.

  Moralité :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_x^{+\infty} tf(t)\, dt = \mathbf{E}(X) - \mathbf{E}(X) = 0$$

et par le **théorème d'encadrement** :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} x\mathbf{P}([X>x])=0}$$

Enfin selon (42) :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad \int_0^x (1-F(t))\,dt=\varphi(x)+x\mathbf{P}([X>x]) \tag{43}$$

avec :

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\mathbf{E}(X)$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathbf{P}([X>x])=0$

Conclusion : selon (43),

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x (1-F(t))\,dt=\mathbf{E}(X)$$

Autrement dit :

$$\boxed{\mathbf{E}(X)=\int_0^{+\infty}(1-F(t))\,dt=\int_0^{+\infty}\mathbf{P}([X>t])\,dt} \tag{44}$$

C'est la formule de "**l'espérance et l'antirépartition**".

Partie III

On considère la fonction F_n définie par :

$$F_n(x)=\begin{cases}0 & \text{si}\quad x<0\\ 1-\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n e^{-x} & \text{si}\quad x\geq 0\end{cases}$$

1. Vous avez deux points essentiels à vérifier afin de conclure que F_n est la fonction de répartition d'une variable T_r :
   - La fonction F_n est continue sur $\mathbb{R}$ car F_n est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ (coïncidence avec la fonction nulle sur cet ensemble) et par produit et composition sur $\mathbb{R}_+$ avec $\lim\limits_{x\to0^-}F_n(x)=0=\lim\limits_{x\to0^+}F_n(x)$ puisque $\lim\limits_{x\to0^+}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n e^{-x}=1$.
   - La fonction F_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur au moins $\mathbb{R}^*$ car F_n est de classe sur $\mathbb{R}_-^*$ (coïncidence avec la fonction nulle sur cet ensemble) et par produit et composition sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Conclusion :

   $$\boxed{\text{La fonction } F_n \text{ est bien la fonction de répartition d'une variable à densité } T_n}$$

2. (a) Pour tout entier naturel k, la fonction $x\longmapsto x^k e^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc l'intégrale I_k présente une seule impropreté, en $+\infty$. Comme :

   $$\lim_{x\to+\infty}x^2\times x^k e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}x^{k+2}e^{-x}=0$$

   par **croissance comparées** (exponentielle-puissance), pour tout entier naturel k,

   $$x^k e^{-x}\underset{x\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

   avec $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ convergente en tant qu'**intégrale de Riemann** de paramètre $2>1$. Ainsi le **critère de négligeabilité appliqué aux fonctions positives** permet de dire que pour tout entier k l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}x^k e^{-x}dx$ converge et par conséquent :

   $$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } k\text{, l'intégrale } I_k=\int_0^{+\infty}x^k e^{-x}dx \text{ converge}}$$

(b) Montrer que $I_{k+1} = (k+1)\, I_k$ puis donner la valeur de I_k.
Le résultat s'obtient après partialisation plus calcul de limite. Par définition pour tout entier naturel k :

$$\begin{aligned} I_{k+1} &= \int_0^{+\infty} x^{k+1} e^{-x} dx \\ &= \lim_{\alpha\to+\infty} \int_0^{\alpha} x^{k+1} e^{-x} dx \\ &= \lim_{\alpha\to+\infty} \left(\left[-x^{k+1}e^{-x}\right]_0^{\alpha} + (k+1) \int_0^{\alpha} x^k e^{-x} dx \right) \end{aligned}$$

en **intégrant par parties** où $u : x \longmapsto x^{k+1}$ et $v : x \longmapsto -e^{-x}$ sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Moralité pour tout entier naturel k :

$$\begin{aligned} I_{k+1} &= \lim_{\alpha\to+\infty} \left(\left[-x^{k+1}e^{-x}\right]_0^{\alpha} + (k+1) \int_0^{\alpha} x^k e^{-x} dx \right) \\ &= \lim_{\alpha\to+\infty} \left(-\alpha^{k+1}e^{-\alpha} + (k+1) \int_0^{\alpha} x^k e^{-x} dx \right) \end{aligned}$$

avec :

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \alpha^{k+1} e^{-\alpha} = 0$$

(encore les croissances comparées exponentielle-puissance) ;

$$\lim_{\alpha\to+\infty} (k+1) \int_0^{\alpha} x^k e^{-x} dx = (k+1) \int_0^{\alpha} x^k e^{-x} dx = (k+1)\, I_k$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad I_{k+1} = (k+1)\, I_k}$$

Par itérations successives, pour tout entier naturel k :

$$\begin{aligned} I_k &= k! I_0 \\ &= k! \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-x} dx}_{=1 \text{ en partialisant !}} \\ &= k! \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad I_k = k!}$$

2. En déduire , en utilisant la **partie II**, que T_n a une espérance et que $\mathbf{E}(T_n) = \mathbf{E}(N)$.
La variable T_n est à valeur dans $\mathbb{R}_+$ alors en reprenant le résultat (44), sous réserve de converge de l'intégrale en jeu, nous avons :

$$\mathbf{E}(T_n) = \int_0^{+\infty} (1 - F_n(t))\, dt = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-x}\, dt$$

La convergence ne pose aucun problème (c'est confirmé par $\lim_{x\to+\infty} x^2 \times \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-x} = 0$). T_n admet une espérance égale à :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(T_n) &= \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-x}\, dt \\ &= \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{x}{n}\right)^k e^{-x}\, dt \\ &= \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A_n^k}{k!} \left(\frac{x}{n}\right)^k e^{-x}\, dt \\ &= \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A_n^k}{k! n^k} x^k e^{-x}\, dt \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{A_n^k}{k!n^k} \int_0^{+\infty} x^k e^{-x}\, dt$$

car pour tout k les intégrales I_k sont **convergentes**, on peut donc permuer $\sum$ et $\int$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{A_n^k}{k!n^k} I_k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{A_n^k}{n^k}$$

$$= \mathbf{E}(N)$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{E}(T_n) = \mathbf{E}(N)}$$