Le 07/05/2014 à 07H55

Les résultats du cours en un clin d'oeil

ENSEMBLES

D **(Définition intuitive d'un ensemble)** C'est le tout formant une collection d'objets ayant une propriété commune. Chaque objet d'un ensemble est appelé **élément**, et écrire que x est un élément de A se note $x \in A$. Dans le cas contraire, on note $x \notin A$. On dit que $A = B$ lorsque $\forall x \in A,\ x \in B$ et $\forall x \in B,\ x \in A$. Par contraposée $A \neq B$ lorsque $\exists x \in A,\ x \notin B$ ou $\exists x \in B,\ x \notin A$.

R L'ordre de l'écriture des éléments d'un ensemble n'a aucune importance, ainsi que leurs répétitions éventuelles. Par exemple : $\{1,2,3\} = \{2,3,1\} = \{1,1,2,3,3,3\}$.

D Soit A et B deux ensembles, on dira que B est un **sous-ensemble** de A ou que B est une **partie** de A si et seulement si tout élément de B est aussi un élément de A. Ainsi : $B \subset A$ lorsque $\forall x \in B,\ x \in A$.

R $(A = B) \Longleftrightarrow (A \subset B \text{ et } B \subset A)$.

D On appelle **ensemble des parties** de A, l'ensemble de tous les sous-ensembles de A, on le note $\mathcal{P}(A)$, il contient évidemment A lui-même et l'ensemble vide.

R ► Ecrire $A \subset E$ se traduit par $A \in \mathcal{P}(E)$.
► Ecrire $a \in A$ se traduit par $\{a\} \subset A$ (on n'écrit jamais $a \subset A$!!).

D ► $A \cup B = \{x \in \Omega,\ x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
► $\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I,\ x \in A_i\}$.

P $A \cup A = A$, $A \cup B = B \cup A$, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$, $(A \subset B) \Longleftrightarrow (A \cup B = B)$, $\varnothing \cup A = A$, $\Omega \cup A = \Omega$, $A \cup \overline{A} = \Omega$.

D ► $A \cap B = \{x \in \Omega,\ x \in A \ et\ x \in B\}$.
► $\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I,\ x \in A_i\}$.

P $A \cap A = A$, $A \cap B = B \cap A$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$, $(A \subset B) \Longleftrightarrow (A \cap B = A)$, $\emptyset \cap A = \emptyset$, $\Omega \cap A = A$, $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

P ► $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
► $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup B = \bigcap_{i\in I} (A_i \cup B)$, $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i\in I} (A_i \cap B)$, $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cup B_j)$, $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j)$.

P ► $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (où $\overline{A} = \complement_E A$) **(Lois de Morgan).**
► $\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$, $\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$ **(Lois de Morgan généralisées).**

P $\left(B = \overline{A}\right) \Longleftrightarrow (A \cup B = E \text{ et } A \cap B = \emptyset)$.

P $\overline{\Omega} = \emptyset$, $\overline{\emptyset} = \Omega$, $\overline{\overline{A}} = A$, $\left(B = \overline{A}\right) \Longleftrightarrow \left(A = \overline{B}\right)$, $(A \subset B) \Longrightarrow \left(\overline{B} \subset \overline{A}\right)$.

D $A - B = \{x \in \Omega,\ x \in A \ et\ x \notin B\}$.

P $A - B = A \cap \overline{B}$, $A - B = A - (A \cap B)$, $\overline{A} = \Omega - A$, $((A - B) = A) \Longleftrightarrow (A \cap B = \varnothing)$.

D $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$.

D ► $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \text{ et } b \in B\}$.
► $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 \in A_1,\ x_2 \in A_2, \ldots,\ x_n \in A_n\}$.

D Soit E un ensemble. Pour toute partie A de E, on définit la **fonction indicatrice** (ou **fonction caractéristique**) de A notée $\mathbb{I}_A$ par : $\mathbb{I}_A : x \in E \mapsto \mathbb{I}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \in \{0;1\}$.

P ► $\forall x \in E,\ \mathbb{I}_\Omega(x) = 1,\ \mathbb{I}_\emptyset(x) = 0$.
► $\mathbb{I}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{I}_A$, $\mathbb{I}_{A\cap B} = \mathbb{I}_A \times \mathbb{I}_B$, $\mathbb{I}_{A\cup B} = \mathbb{I}_A + \mathbb{I}_B - \mathbb{I}_A \times \mathbb{I}_B$.

FORMULES COMBINATOIRES

T Soit n un entier naturel,
► $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
► $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
► $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

D ► $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ avec $0 \leq p \leq n$.
► On pose $\binom{n}{p} = 0$ lorsque $p > n$.

P ► $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ p \leq n,\ \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ (symétrie).
► $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ 1 \leq p \leq n,\ \binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$.
► $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ 1 \leq p \leq n,\ \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$ (triangle de Pascal).
► $\forall (p,d) \in \mathbb{N}^2,\ p \leq d,\ \sum_{n=p}^{d} \binom{n}{p} = \binom{d+1}{p+1}$ (triangle de Pascal généralisée).

T **Formule du binôme de Newton :** $\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2,\ (a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^k b^{n-k}$.

P ► $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ p \leq n,\ \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$.
► $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p} = 2^{n-1} = \sum_{p=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2p+1}$.

► $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

T **Formule multinomiale** (HP mais ...) $\forall (a_1,\dots,a_p) \in \mathbb{R}^p$,

$$\sum_{\left\{\substack{(n_1,\dots,n_p)\in[\![0,n]\!]^p \\ n_1+\dots+n_p=n}\right.} \underbrace{\frac{n!}{n_1!\times n_2!\times\cdots\times n_p!}}_{\text{coeff. multinomial}} a_1^{n_1}\times\cdots\times a_p^{n_p} = (a_1+\cdots+a_p)^n \text{ où } n\in\mathbb{N}.$$

T **V.D.M.** $\forall (n_1,n_2,n) \in \mathbb{N}^3,\ n \leq n_1+n_2,\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n_1}{k}\binom{n_2}{n-k} = \binom{n_1+n_2}{n}$.

P $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

T **V.D.M. généralisée** (HP mais ...) $\forall (N_1,\dots,N_k) \in \mathbb{N}^p$,
$\sum_{\left\{\substack{(n_1,\dots,n_k)\in[\![0,n]\!]^k \\ n_1+\dots+n_k=n}\right.} \binom{N_1}{n_1}\binom{N_2}{n_2}\times\cdots\times\binom{N_k}{n_k} = \binom{N_1+\cdots+N_k}{n}$.

T $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ p \leq n,\ \sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_p\leq n} 1 = \binom{n}{p}$.

T $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ n \geq 1,\ \sum_{1\leq i_1\leq i_2\leq\cdots\leq i_p\leq n} 1 = \binom{p+n-1}{p}$.

D ► $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ p\leq n,\ \forall (a_p,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^p,\ \prod_{k=p}^{n} a_k = a_p\times\cdots\times a_n$.

► On pose $\prod_{k=p}^{n} a_k = 1$ quand $p > n$.

P Soit n un entier naturel,

► $\prod_{k=0}^{n} k = n!$

► $\prod_{k=0}^{n} (2k) = 2^n n!$

► $\prod_{k=0}^{n} (2k+1) = \dfrac{(2n+1)!}{2^n n!}$.

DÉNOMBREMENT

T ► Soit A et B deux ensembles tels que A est *fini* et $B\subset A$, alors $\mathrm{Card}(B) \leq \mathrm{Card}(A)$ et $\mathrm{Card}(A-B) = \mathrm{Card}(A) - \mathrm{Card}(B)$.

► $(\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B)) \Leftrightarrow (A = B)$.

► $\mathrm{Card}(A \uplus B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B)$, $\mathrm{Card}\left(\biguplus_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Card}(A_k)$.

► $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{Card}\left(\prod_{k=1}^{n} A_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{Card}(A_k)$.

T **Poincaré :**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{Card}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n} \mathrm{Card}(A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k}).$$

D **Partition d'un ensemble :** On dit que la famille d'événements $(A_i)_{i\in I}$ est une *partition* de E : $\forall i \in I,\ A_i \neq \emptyset,\ (\forall (i,j) \in I^2,\ i\neq j) \Rightarrow (A_i\cap A_j = \emptyset)$ et $\biguplus_{i\in I} A_i = E$.

Remarque **:** c'est la même déf. pour un SCE avec $E = \Omega$.

T **Lemme des bergers :** Soit E et F *deux ensembles finis* et f une application *surjective* de E vers F. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $y \in F$, $\mathrm{Card}\left(f^{-1}(\{y\})\right) = p$, alors $\mathrm{Card}(E) = p\,\mathrm{Card}(F)$.

T **Nombre d'applications de E vers F** : $\mathrm{Card}(\mathcal{A}(E,F)) = (\mathrm{Card}(F))^{\mathrm{Card}(E)}$.

T **Nombre d'injections de E_p vers F_n** avec $p\leq n$: A_n^p.

T **Nombre de permutations de E_n** avec $n\in\mathbb{N}^*$: $A_n^n = n!$

T **Nombre de $p-$listes de E_n** : n^p.

T **Nombre de combinaisons de p éléments de E_n**, avec $1\leq p\leq n$: $\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!}$.

T **Nombre de parties d'un ensemble E** : $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\mathrm{Card}(E)}$.

T **Problème des anagrammes** :
$\binom{n}{n_1}\times\binom{n-n_1}{n_2}\times\cdots\times\binom{n-n_1-\cdots-n_{p-1}}{n_p} = \frac{n!}{n_1!\times n_2!\times\cdots\times n_p!}$.

T **Nombre de suites :**

► $\mathrm{Card}\left(\left\{(x_1,x_2,\dots,x_p) \in (\mathbb{N}^*)^p \mid 1\leq x_1<x_2<\cdots<x_p\leq n\right\}\right) = \binom{n}{p}$.

► $\mathrm{Card}\left(\left\{(x_1,x_2,\dots,x_p) \in (\mathbb{N}^*)^p \mid 1\leq x_1\leq x_2\leq\cdots\leq x_p\leq n\right\}\right) = \binom{p+n-1}{p}$.

ESPACES PROBABILISÉS

D **Tribu :** Tout ensemble de parties d'un ensemble Ω, *contenant* Ω, *stable par réunion au plus dénombrable et par passage au complémentaire*, s'appelle une **tribu** ou $\sigma-$algèbre sur Ω, souvent notée $\mathcal{A}$. Autrement dit : $\Omega \in A$, $\forall A \in A$, $\overline{A} \in A$, pour toute suite $(A_n)_{n\geq n_0}$ d'événements de A, $\bigcup_{n=n_0}^{+\infty} A_n \in A$.

P **:** $\emptyset \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ est stable pour $\cap$, $-$, Δ.

P ► $\sigma(A) = \left\{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\right\}$.

► Soit $(A_k)_{k\in K}$ un *SCE* alors $\sigma\left((A_k)_{k\in K}\right) = \left\{\biguplus_{l\in L} A_l \mid L\in\mathcal{P}(K)\right\}$.

► Si Ω au plus dénombrable $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

T **Tribu de Borel :** $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{]-\infty,x[,\ x\in\mathbb{R}\}) = \sigma(\{[x,+\infty[,\ x\in\mathbb{R}\}) = \cdots$

D **Axiomatique d'une probabilité :** Soit $(\Omega,\mathcal{A})$ un espace probabilisable, on appelle *probabilité* sur $(\Omega,\mathcal{A})$ toute application $\mathbf{P} : A \to [0,1]$ vérifiant : $\mathbf{P}(\Omega) = 1$,

$\forall \left(A_k\right)_{k\in K}$, deux à deux disjoints $\sum\limits_k \mathbf{P}\left(A_k\right) < \infty$ et $\mathbf{P}\left(\biguplus\limits_{k\in K} A_k\right) = \sum\limits_{k\in K} \mathbf{P}\left(A_k\right)$ (*$\sigma-$additivité de* $\mathbf{P}$).

$\boxed{\mathbf{D}}$ On appelle **espace probabilisé** tout triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

$\boxed{\mathbf{T}}$ Soit A et B deux événements de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$:

- ▶ $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$.
- ▶ $\mathbf{P}(A \uplus B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$.
- ▶ $\mathbf{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbf{P}(A)$.
- ▶ $\mathbf{P}(A - B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap B)$.
- ▶ $(B \subset A) \Rightarrow (\mathbf{P}(A - B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(B))$.
- ▶ $(B \subset A) \Rightarrow (\mathbf{P}(B) \leq \mathbf{P}(A))$ propriété de croissance de $\mathbf{P}$.
- ▶ $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$.
- ▶ $\mathbf{P}(A \cup B) \leq \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$.
- ▶ $\mathbf{P}\left(\biguplus\limits_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{P}\left(A_k\right)$.

$\boxed{\mathbf{T}}$ **Limite monotone :**

- ▶ $\left(\left(A_n\right)_{n\geq 0} \nearrow\right) \Rightarrow \left(\mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(A_n\right)\right)$.
- ▶ $\left(\left(A_n\right)_{n\geq 0} \searrow\right) \Rightarrow \left(\mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(A_n\right)\right)$.

$\boxed{\mathbf{R}}$ Soit $\left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événemements définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ alors :

- ▶ la suite $\left(\bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** ;
- ▶ la suite $\left(\bigcup\limits_{k\geq n} A_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante** ;
- ▶ la suite $\left(\bigcap\limits_{k=0}^{n} A_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante** ;
- ▶ la suite $\left(\bigcap\limits_{k\geq n} A_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante**.

$\boxed{\mathbf{C}}$ Soit $\left(A_n\right)_{n\geq 0}$ une *suite quelconque d'événements* :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \text{ et } \mathbf{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right).$$

$\boxed{\mathbf{T}}$ **Inégalité de Boole ou sous-additivité (HP mais ...)**

$\mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{P}\left(A_k\right)$ et $\mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}\left(A_n\right)$ (où $\sum\limits_n \mathbf{P}\left(A_n\right) < \infty$ ou diverge).

$\boxed{\mathbf{T}}$ **Relation de Laplace** (cas d'équiprobabilité) $\forall A \in \mathcal{A}$, $\mathbf{P}(A) = \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$.

$\boxed{\mathbf{D}}$ **Indépendance d'événements :**

▶ **2 événements** : $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)$.

▶ ***n* événements 2 à 2 indépendants** :

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, (i \neq j) \Rightarrow \left(\mathbf{P}\left(A_i \cap A_j\right) = \mathbf{P}\left(A_i\right)\mathbf{P}\left(A_j\right)\right)$.

▶ ***n* événements mutuellement indépendants** :

$\forall I \in \mathcal{P}\left([\![1,n]\!]\right), I \neq \emptyset, \mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\right) = \prod\limits_{i\in I} \mathbf{P}\left(A_i\right)$.

▶ **Suites d'événements :** on se ramène au cas fini pour toutes sous-suites finies

$\boxed{\mathbf{P}}$ Les assertions suivantes sont *équivalentes* :

- ▶ $A \perp\!\!\!\perp B$,
- ▶ $A \perp\!\!\!\perp \overline{B}$,
- ▶ $\overline{A} \perp\!\!\!\perp B$,
- ▶ $\overline{A} \perp\!\!\!\perp \overline{B}$.

$\boxed{\mathbf{P}}$ Soit $\left(A_n\right)_n$ une suite d'*événements indépendants* alors $\left(B_n\right)_n$ où pour tout entier n, $B_n = A_n$ ou $\overline{A_n}$ *reste* une suite d'événements indépendants.

$\boxed{\mathbf{D}}$ **Probabilité conditionnelle** : $\forall A \in \mathcal{A} \mid \mathbf{P}(A) \neq 0$, $\mathbf{P}_A(B) = \frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(A)}$.

$\boxed{\mathbf{P}}$ Toutes les propriétés vues sur les probas inconditionnelles sont encore valable :

$\boxed{\mathbf{T}}$ On dit que deux événements A et B où $\mathbf{P}(A) \neq 0$ et $\mathbf{P}(B) \neq 0$, sont indépendants si l'une des conditions équivalentes est vérifiée.

- ▶ $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)$.
- ▶ $\mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B)$.
- ▶ $\mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A)$.

$\boxed{\mathbf{T}}$ **Formule des probabilités composées :** Soit $A_1, \ldots, A_n$, n événements tel que pour tout $n \geq 2$, $\mathbf{P}\left(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}\right) \neq 0$, alors :

$\mathbf{P}\left(A_1 \cap \ldots \cap A_n\right) = \mathbf{P}\left(A_1\right)\mathbf{P}_{A_1}\left(A_2\right)\mathbf{P}_{A_1\cap A_2}\left(A_3\right)\ldots\mathbf{P}_{A_1\cap\ldots\cap A_{n-1}}\left(A_n\right)$.

$\boxed{\mathbf{T}}$ **Formule des probabilités totales :** Soit $\left(A_k\right)_{k\in K}$ un *SCE* tel que $\forall k \in K$, $\mathbf{P}\left(A_k\right) \neq 0$, alors $\forall B \in \mathcal{A}$, $\sum\limits_k \mathbf{P}_{A_k}(B)\,\mathbf{P}\left(A_k\right) < \infty$ et $\mathbf{P}(B) = \sum\limits_{k\in K} \mathbf{P}_{A_k}(B)\,\mathbf{P}\left(A_k\right)$.

$\boxed{\mathbf{T}}$ **Bayes :** Soit $\left(A_k\right)_{k\in K}$ un *SCE* tel que $\forall k \in K$, $\mathbf{P}\left(A_k\right) \neq 0$, alors $\forall B \in \mathcal{A} \mid \mathbf{P}(B) \neq 0 : \forall i \in K, \mathbf{P}_B\left(A_i\right) = \frac{\mathbf{P}_{A_i}(B)\mathbf{P}(A_i)}{\sum\limits_{k\in K}\mathbf{P}_{A_k}(B)\mathbf{P}(A_k)}$.

V.A.R.

Généralités ⓈⒸ

$\boxed{\mathbf{D}}$ ⓈⒸ **:** $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \mid \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$.

$\boxed{\mathbf{D}}$ Ⓢ **:** X v.a.r.d. si $X(\Omega)$ est au plus dénombrable.

D ⓒ **:** X v.a.r.a.d. si $X(\Omega)$ est ∞ **et** indénombrable.

D Ⓢⓒ **:** $X = Y$ lorsque $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) = Y(\omega)$.

D Ⓢⓒ **:** $X = Y$ p.s. lorsque $\mathbf{P}([X = Y]) = 1$.

D Ⓢ $\mathcal{A}_X = \sigma\left(([X = x])_{x \in X(\Omega)}\right) = \left\{ \biguplus_{x \in A} [X = x] \mid A \subset X(\Omega) \right\}$.

D **Loi de probabilité** Ⓢ **:** $P_X : X(\Omega) \longrightarrow [0,1]$, définie par $\forall x \in X(\Omega)$, $P_X(x) = \mathbf{P}([X = x])$.

T **Caractérisation d'une loi**

▶ Ⓢ **:** On donne les probabilités ponctuelles ou bien la fonction de répartition.

▶ ⓒ **:** On donne une densité de X ou la fonction de répartition.

T Ⓢⓒ **:** $(X = Y) \Rightarrow (P_X = P_Y)$.

T Ⓢⓒ **:** $(P_{\boldsymbol{X}} = P_{\boldsymbol{Y}}) \Rightarrow \left(\forall k \geq 0, \mathbf{E}\left(X^k\right) = \mathbf{E}\left(Y^k\right)\right)$.

T **Caractérisation d'une densité** ⓒ **:** (caractérisation) (f densité) $\Leftrightarrow$ **(** $f \geq 0$ sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}^0$ presque partout, $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge et vaut 1)

D **Fonction de répartition $\boldsymbol{F}$**

▶ Ⓢ **:** $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \sum_{\begin{cases} x_i \in X(\Omega) \\ x_i \leq x \end{cases}} \mathbf{P}([X = x_i])$.

▶ ⓒ **:** $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\, du$.

T ⓒ **:** $F' = f$ là ou F est dérivable i.e. là où f est continue.

P ▶ ⓈⓒⒸ **:** Dans le cas général $\lim_{-\infty} F = 0$, $\lim_{+\infty} F = 1$, F $\mathcal{C}^0$ à droite en tout point de $\mathbb{R}$, F non décroissante.

▶ ⓒ **:** On rajoute $F : \mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} - I$ (I ensemble fini éventuellement vide).

P Ⓢ **:**▶ $\forall a \in \mathbb{R}$, $\mathbf{P}([X = a]) = F_X(a) - F_X(a^-)$.

▶ $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a \leq b$, $\mathbf{P}([a \leq X \leq b]) = F_X(b) - F_X(a^-)$.

▶ $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a \leq b$, $\mathbf{P}([a < X \leq b]) = F_X(b) - F_X(a)$.

▶ $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a \leq b$, $\mathbf{P}([a \leq X < b]) = F_X(b^-) - F_X(a^-)$.

▶ $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a \leq b$, $\mathbf{P}([a < X < b]) = F_X(b^-) - F_X(a)$.

T ⓒ **:** $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, a \leq b$, $\mathbf{P}([a \leq X \leq b]) = \mathbf{P}([a < X \leq b]) = \mathbf{P}([a \leq X < b]) = \mathbf{P}([a < X < b]) = \int_a^b f_X(u)\, du$.

T $\forall B \subset X(\Omega)$, $\mathbf{P}(B) = \begin{cases} Ⓢ \sum_{x_i \in B} \mathbf{P}([X = x_i]) \\ ⓒ \int_{x \in B} f(x)\, dx \end{cases}$.

Moments Ⓢⓒ

D **Espérance**

$\mathbf{E}(X) = \begin{cases} Ⓢ \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i \mathbf{P}([X = x_i]) \text{ ssr } |\text{cv}| \\ ⓒ \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx \text{ ssrc} \end{cases}$.

D **Espérance conditionnelle** Ⓢ **:** $\forall A \in \mathcal{A} \mid \mathbf{P}(A) \neq 0$: $\mathbf{E}(X \mid A) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i \mathbf{P}_A([X = x_i])$ sr|cv|.

T **Formule de l'espérance totale** Ⓢ Soit $(A_i)_{i \in I}$ un *SCE* tq $\forall i \in I$, $\mathbf{P}(A_i) \neq 0$, $\mathbf{E}(X) = \sum_{i \in I} \mathbf{E}(X \mid A_i)\, \mathbf{P}(A_i)$ ssr|cv|.

D **Moment d'ordre $\boldsymbol{r \geq 0}$**

$m_r(X) = \mathbf{E}(X^r) = \begin{cases} Ⓢ \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i^r \mathbf{P}([X = x_i]) \text{ ssr } |\text{cv}| \\ ⓒ \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)\, dx \text{ ssrcv} \end{cases}$.

D **Moment centré d'ordre $\boldsymbol{r \geq 0}$**

$\mu_r(X) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))^r) = \begin{cases} Ⓢ \sum_{x_i \in X(\Omega)} (x_i - \mathbf{E}(X))^r \mathbf{P}([X = x_i]) \text{ ssr } |\text{cv}| \\ ⓒ \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - \mathbf{E}(X))^r f(x)\, dx \text{ ssr } |\text{cv}| \end{cases}$.

D Ⓢ **Moment factoriel d'ordre $\boldsymbol{r \geq 1}$**

$\mathbf{E}(X(X-1)\ldots(X-r+1)) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i(x_1 - 1)\ldots(x_i - r + 1)\, \mathbf{P}([X = x_i])$ ssr|cv|.

T Ⓢⓒ **:**Soit $r \in \mathbb{N}$ alors $(m_{r+1}(X) < \infty) \Rightarrow (\forall k \in [\![0, r]\!], m_k(X)) < \infty)$.

T Ⓢⓒ **:** $\left(\mu_{r+1}(X) < \infty\right) \Rightarrow (\forall k \in [\![0, r]\!],\ \mu_k(X) < \infty)$.

T Ⓢⓒ **:** $\forall r \in \mathbb{N}$, $(m_r(X) < \infty) \Leftrightarrow (\mu_r(X) < \infty)$.

P **Inégalités de moments**

▶ Ⓢⓒ **:** $\forall X \in \mathcal{L}^1$, $(X \geq 0) \Rightarrow (\mathbf{E}(X) \geq 0)$.

▶ Ⓢⓒ **:** $\forall (X,Y) \in \left(\mathcal{L}^1\right)^2$, $(X \leq Y) \Rightarrow (\mathbf{E}(X) \leq \mathbf{E}(Y))$.

▶ Ⓢⓒ **:** $\forall (X,Y) \in \left(\mathcal{L}^1\right)^2$, $(X = Y) \Rightarrow (\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y))$.

▶ Ⓢⓒ **:** $\left(\forall Y \in \mathcal{L}^1 \text{ et } X \text{ tel que } |X| \leq Y\right) \Rightarrow \left(X \in \mathcal{L}^1 \text{ et } \mathbf{E}(|X|) \leq \mathbf{E}(Y)\right)$.

▶ Ⓢⓒ **:** $\forall X \in \mathcal{L}^1$, $|\mathbf{E}(X)| \leq \mathbf{E}(|X|)$.

▶ Ⓢⓒ **:** $\forall X \in \mathcal{L}^2$, $\mathbf{E}\left(X^2\right) \geq (\mathbf{E}(X))^2$.

T **Transfert**

$\mathbf{E}(\varphi(X)) = \begin{cases} Ⓢ \sum_{x_i \in X(\Omega)} \varphi(x_i)\, \mathbf{P}([X = x_i]) \text{ ssr } |\text{cv}| \text{ où } \varphi \text{ déf sur } X(\Omega) \\ ⓒ \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x)\, dx \text{ ssr } |\text{cv}| \text{ où } \varphi \text{ est } \mathcal{C}^0 \text{ presque partout} \end{cases}$.

D ▶ $\mathbf{V}(X) = \begin{cases} Ⓢ \sum_{x_i \in X(\Omega)} (x_i - \mathbf{E}(X))^2\, \mathbf{P}([X = x_i]) \text{ ssr } |\text{cv}| \\ ⓒ \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - \mathbf{E}(X))^2 f(x)\, dx \text{ ssrcv} \end{cases}$.

▶ Ⓢⓒ : $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$.

T **Théorème de Huygens-Koenig** Ⓢⓒ : $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2$.

T Ⓢⓒ : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{E}(aX+b) = a\mathbf{E}(X) + b$ et $\mathbf{V}(aX+b) = a^2\mathbf{V}(X)$.

VECTEURS ALÉATOIRES

Séries doubles

T **Fubini dans le cas positif (F⊕)** Soit $u = (u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille à deux indices de réels positifs indexée par $I \times J \subset \mathbb{N}^2$. **Si** $\forall i \in I$, $\sum_j u_{i,j} < +\infty$ *puis* $\sum_i \sum_{j\in J} u_{i,j} < +\infty$ **alors** $\sum_{(i,j)} u_{i,j} < +\infty$. On a alors les résultats suivants : $\forall j \in J$, $\sum_i u_{i,j} < +\infty$ *puis* $\sum_j \sum_{i\in I} u_{i,j} < +\infty$ et $\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} u_{i,j}\right)$.

T **Comparaison pour les séries à termes positifs**

▶ Soit $I' \subset I$ et $J' \subset J$ et deux séries $\sum_{(i,j)} u_{i,j}$ et $\sum_{(i,j)} v_{i,j}$ tel que $\forall (i,j) \in I' \times J'$, $0 \le v_{i,j} \le u_{i,j}$. Alors ($\sum_{(i,j)} u_{i,j}$ cv) ⇒ ($\sum_{(i,j)} v_{i,j}$ cv).

▶ Par *contraposée* ($\sum_{(i,j)} v_{i,j}$ div) ⇒ ($\sum_{(i,j)} u_{i,j}$ div).

T **Sommation par paquets (admis)** Soit $\sum_{i,j} |u_{i,j}| < +\infty$ où $(i,j) \in I \times J$, et $(A_k)_{k\in K}$ une partition de $I \times J$, alors on a : $\forall k \in K$, $\sum_{(i,j)} |u_{i,j}| < +\infty$ où $(i,j) \in A_k$ de somme $\sum_{(i,j)\in A_k} u_{i,j}$, et $\sum_k \left(\sum_{(i,j)\in A_k} |u_{i,j}|\right) < +\infty$.

Enfin on a $\sum_{k\in K}\left(\sum_{(i,j)\in A_k} u_{i,j}\right) = \sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j}$.

Couples discrets

D **Loi de probabilité d'un couple** Soit $C = (X,Y)$. $P_C : X(\Omega) \times Y(\Omega) \longrightarrow [0,1]$, définie par $\forall (x_i, y_j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $P_C(x_i, y_j) = \mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = p_{i,j}$.

T D **Lois marginales**

▶ $P_X : X(\Omega) \longrightarrow [0,1]$, définie par $\forall x_i \in X(\Omega)$, $P_X(x_i) = \mathbf{P}([X = x_i])$ et

▶ $P_Y : Y(\Omega) \longrightarrow [0,1]$, définie par $\forall y_j \in Y(\Omega)$, $P_Y(y_j) = \mathbf{P}([Y = y_j])$.

T ▶ $\forall x_i \in X(\Omega)$, $\mathbf{P}([X = x_i]) = p_{i\bullet} = \sum_{y_j\in Y(\Omega)} p_{i,j}$ et

▶ $\forall y_j \in Y(\Omega)$, $\mathbf{P}([Y = y_j]) = p_{\bullet j} = \sum_{x_i\in X(\Omega)} p_{i,j}$.

D **Lois conditionnelles**

▶ $\mathbf{P}_{[X=x_i]} : Y(\Omega) \longrightarrow [0,1]$, définie par $\forall y_j \in Y(\Omega)$, $\mathbf{P}_{[X=x_i]}([Y = y_j]) = \dfrac{p_{i,j}}{p_{i\bullet}}$ et

▶ $\mathbf{P}_{[Y=y_j]} : X(\Omega) \longrightarrow [0,1]$, définie par $\forall x_i \in X(\Omega)$, $\mathbf{P}_{[Y=y_j]}([X = x_i]) = \dfrac{p_{i,j}}{p_{\bullet j}}$.

T **Caractérisation de la loi d'une fonction d'un couple** Notons $Z = g(X,Y)$. *Caractériser* la loi de la variable Z, c'est donner $Z(\Omega) = g(X,Y)(\Omega)$ et pour tout z de $Z(\Omega)$: $\mathbf{P}([Z = z]) = \sum_{\left\{\substack{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)\\ g(x,y)=z}\right.} \mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y])$.

T $\forall I \in \mathcal{P}(Z(\Omega))$: $\mathbf{P}([Z \in I]) = \sum_{\left\{\substack{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)\\ g(x,y)\in I}\right.} \mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y])$.

T Ⓢ **Théorème de transfert** Soit φ *définie sur* $\mathcal{D} \supset X(\Omega) \times Y(\Omega)$,
$\mathbf{E}(\varphi(X,Y)) = \sum_{(x_i,y_j)\in(X,Y)(\Omega)} \varphi(x_i,y_j)\mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j])$ ssr|cv| de la série double en jeu.

T **Droite de régression de Y en X** notée Δ a pour équation :
$\widehat{Y} = \left(\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathbf{V}(X)}\right)(X - \mathbf{E}(X)) + \mathbf{E}(Y)$ et en inversant les rôles symétriques de X et Y nous obtenons $\widehat{X} = \left(\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathbf{V}(Y)}\right)(Y - \mathbf{E}(Y)) + \mathbf{E}(X)$ qui est l'équation de la *droite de régression de X en Y* notée Δ'.

Vecteurs discrets

D **Loi d'un vecteur de dimension $n \geq 2$** Soit $V = (X_1, \ldots, X_n)$ $P_V : X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega) \longrightarrow [0,1]$, définie par $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^n X_k(\Omega)$,

$P_V(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i = x_i]\right)$.

D **Lois marginales de dimension un :** $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $P_{X_k} : X_k(\Omega) \longrightarrow [0,1]$, déf. par $\forall x_k \in X_k(\Omega)$, $P_{X_k}(x_k) = \mathbf{P}([X_k = x_k])$.

T $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\forall x_k \in X_k(\Omega)$,

$$\mathbf{P}([X_k = x_k]) = \sum_{(x_1,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_n)\in \prod_{m\in[\![1,n]\!]-\{k\}} X_m(\Omega)} \mathbf{P}\left(\bigcap_{j=1}^n [X_j = x_j]\right).$$

T **Théorème de transfert** Soit $V = (X_1, \ldots, X_n)$ alors $\mathbf{E}(\varphi(X_1, \ldots, X_n)) = \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in X_1(\Omega)\times\cdots\times X_n(\Omega)} \varphi(x_1, \ldots, x_n)\mathbf{P}([X_1 = x_1] \cap \ldots \cap [X_n = x_n])$ ssr|cv|.

T **Caractérisation de la loi d'une fonction d'un vecteur** Soit $V = (X_1, \ldots, X_n)$ et φ une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}^n$ contenant $\prod_{k=1}^n X_k(\Omega)$, alors la *loi* de

$Z=\varphi(V)$ est *caractérisée* par la donnée de $Z(\Omega)\subset \operatorname{Im}\varphi$ et par celles de $\mathbf{P}([Z=z]) = \sum\limits_{\left\{\substack{(x_1,\dots,x_n)\in X_1(\Omega)\times\cdots\times X_n(\Omega)\\ \varphi(x_1,\dots,x_n)=z}\right.} \mathbf{P}([X_1=x_1]\cap\ldots\cap[X_n=x_n])$ pour tout z de $Z(\Omega)$.

Covariance

D ⓈⒸ Soit $X,Y\in\mathcal{L}^2$, $\operatorname{Cov}(X,Y)=\mathbf{E}((X-\mathbf{E}(X))(Y-\mathbf{E}(Y)))$.

P ⓈⒸ **:** Soit $X,Y\in\mathcal{L}^2$,

▶ $\operatorname{Cov}(X,Y)=\mathbf{E}(XY)-\mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$ (théorème de Huygens).

▶ $\operatorname{Cov}(X,X)=\mathbf{V}(X)\geq 0$ (positivité).

▶ $\operatorname{Cov}(X,Y)=\operatorname{Cov}(Y,X)$ (symétrie).

▶ Soit $X,Y,Z\in\mathcal{L}^2, \forall(a,b)\in\mathbb{R}^2, \operatorname{Cov}(aX+bY,Z)=a\operatorname{Cov}(X,Z)+b\operatorname{Cov}(Y,Z)$ (linéarité à gauche).

▶ $\forall(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$, $\operatorname{Cov}(aX+b,cY+d)=ac\operatorname{Cov}(X,Y)$.

▶ $\forall k$, $\forall l$, X_k et $Y_l\in\mathcal{L}^2_d$, λ_k et $\mu_l\in\mathbb{R}$,

$\operatorname{Cov}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i X_i, \sum\limits_{j=1}^{m}\mu_j Y_j\right)=\sum\limits_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!]}\lambda_i\mu_j\operatorname{Cov}(X_i,Y_j)$ (bilinéarité).

T ⓈⒸ **:** $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $X_i\in\mathcal{L}^2$, $a_i\in\mathbb{R}$,

$\mathbf{V}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_iX_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\mathbf{V}(X_i)+2\sum\limits_{1\leq i<j\leq n}a_ia_j\operatorname{Cov}(X_i,X_j)$.

T (Identités de polarisation) ⓈⒸ **:** Soit $X,Y\in\mathcal{L}^2_d$ alors :

▶ $\mathbf{V}(X)+\mathbf{V}(Y)=\dfrac{1}{2}(\mathbf{V}(X+Y)+\mathbf{V}(X-Y))$.

▶ $\operatorname{Cov}(X,Y)=\dfrac{1}{4}(\mathbf{V}(X+Y)-\mathbf{V}(X-Y))$.

▶ $\operatorname{Cov}(X,Y)=\dfrac{1}{2}(\mathbf{V}(X+Y)-\mathbf{V}(X)-\mathbf{V}(Y))$.

▶ $\operatorname{Cov}(X,Y)=\dfrac{1}{2}(\mathbf{V}(X)+\mathbf{V}(Y)-\mathbf{V}(X-Y))$.

T Soit $X_1,\dots,X_n\in\mathcal{L}^2_d$ *indépendantes, alors* $\mathbf{V}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}\mathbf{V}(X_i)$. Réciproque *fausse*.

D ⓈⒸ **:** Soit $X,Y\in\mathcal{L}^2 \mid\not\leftrightarrow \delta$[1] $:\rho(X,Y)=\frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbf{V}(X)\mathbf{V}(Y)}}$.

P ▶ ⓈⒸ **:** Soit $X,Y\in\mathcal{L}^2\mid\not\leftrightarrow\delta$: $|\rho(X,Y)|\leq 1$ soit $|\operatorname{Cov}(X,Y)|\leq\sigma(X)\sigma(Y)$ **(Inégalité de Cauchy-Schwarz).**

▶ ⓈⒸ **:** $(|\rho(X,Y)|=1)\Leftrightarrow(Y=aX+b\text{ p.s.})$.

[1] Cela veut dire de variances non nulles.

D **Matrice de covariance-variance** ⓈⒸ **:** Soit pour tout k de $[\![1,n]\!]$, $X_k\in\mathcal{L}^2_d$, on appelle *matrice de covariance-variance du vecteur aléatoire* $V=(X_1,\dots,X_n)$ la *matrice symétrique réelle* de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ notée Γ_V définie par : $\Gamma_V=(\operatorname{Cov}(X_i,X_j))_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$.

T ⓈⒸ **:** $\forall(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$, $\mathbf{V}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_iX_i\right)={}^t\begin{pmatrix}a_1&\cdots&a_n\end{pmatrix}\Gamma_V\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$. La forme quadratique associée à Γ_V qui montre que la matrice Γ_V est positive.

Indépendance

D ▶ Ⓢ **:** $X_1\perp\!\!\!\perp\ldots\perp\!\!\!\perp X_n\in\mathcal{L}^1$, lorsque $\forall(x_1,\dots,x_n)\in\prod\limits_{i=1}^{n}X_i(\Omega)$, $\mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n}[X_i=x_i]\right)=\prod\limits_{i=1}^{n}\mathbf{P}([X_i=x_i])$.

▶ ⓈⒸ **:** $X_1\perp\!\!\!\perp\ldots\perp\!\!\!\perp X_n$ lorsque $\forall(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$,

$\mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n}[X_i\leq x_i]\right)=\prod\limits_{i=1}^{n}\mathbf{P}([X_i\leq x_i])$.

T ▶ ⓈⒸ **:** $(X\perp\!\!\!\perp Y)\Rightarrow(\forall(\varphi,\psi),\boldsymbol{\varphi}(X)\perp\!\!\!\perp\psi(Y))$ Réciproque *fausse*.

▶ ⓈⒸ **:** $(X_1\perp\!\!\!\perp\ldots\perp\!\!\!\perp X_n)\Rightarrow\left(\mathbf{E}\left(\prod\limits_{i=1}^{n}X_i\right)=\prod\limits_{i=1}^{n}\mathbf{E}(X_i)\right)$.

▶ ⓈⒸ **:** $(X\perp\!\!\!\perp Y)\Rightarrow(\operatorname{Cov}(X,Y)=0)$.

▶ ⓈⒸ **:** $(\operatorname{Cov}(X,Y)\neq 0)\Rightarrow(X\not\perp\!\!\!\not\perp Y)$.

▶ ⓈⒸ **:** $(\operatorname{Cov}(X,Y)=\mathbf{0})\Rightarrow$ **?**

▶ ⓈⒸ **:** $(X\perp\!\!\!\perp Y)\Rightarrow(\rho(X,Y)=0)$ Réciproque *fausse*.

▶ ⓈⒸ **:** $(\rho(X,Y)\neq 0)\Rightarrow(X\not\perp\!\!\!\not\perp Y)$.

▶ ⓈⒸ **:** $(\rho(X,Y)=\mathbf{0})\Rightarrow$ **?**

▶ Ⓢ **:** $(X\perp\!\!\!\perp Y)\Longrightarrow\left(\left\{\begin{array}{l}\mathbf{E}(X\mid[Y=y_j])=\mathbf{E}(X)\\ \mathbf{E}(Y\mid[X=x_i])=\mathbf{E}(Y)\end{array}\right.\right)$.

▶ ⓈⒸ **:** $\forall(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n,(X_1\perp\!\!\!\perp\ldots\perp\!\!\!\perp X_n)\Rightarrow\left(\mathbf{V}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_iX_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\mathbf{V}(X_i)\right)$.

▶ ⓈⒸ **: Lemme des coalitions** $(X_1\perp\!\!\!\perp\ldots\perp\!\!\!\perp X_{n+m})\Rightarrow(\forall(\varphi,\psi),\boldsymbol{\varphi}(X_1,\dots,X_n)\perp\!\!\!\perp\psi(X_{n+1},\dots,X_{n+m}))$ ((HP) on peut "bordéliser" comme on veut les variables aléatoires avec autant de fonctions que l'on veut).

T **Convolution**

▶ Ⓢ $(X\perp\!\!\!\perp Y)\Rightarrow\left(\mathbf{P}([X+Y=z])=\sum\limits_{x\mid\left\{\substack{x\in X(\Omega)\\ z-x\in Y(\Omega)}\right.}\mathbf{P}([X=x])\mathbf{P}([Y=z-x])\right)$

▶ Ⓒ $(X \perp\!\!\!\perp Y) \Rightarrow \left(f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t) f_Y(t)\,dt\right)$, f_{X+Y} est $\mathcal{C}^0$ presque partout.

INÉGALITÉS DE CONCENTRATION

T **Inégalité de Markov (I.M.)**

▶ ⓈⒸ **:** Soit $X \in \mathcal{L}^1$ à *valeurs positives*, alors $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbf{P}([X \geq \varepsilon]) \leq \frac{\mathbf{E}(X)}{\varepsilon}$.

▶ Ce qui se généralise pour $\forall r > 0$, $X \in \mathcal{L}^r$, $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbf{P}([|X| \geq \varepsilon]) \leq \frac{\mathbf{E}(|X|^r)}{\varepsilon^r}$.

T **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev (I.B.T.)** ⓈⒸ **:** Soit $X \in \mathcal{L}^2$ *admettant variance non nulle*, alors $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbf{P}([|X - \mathbf{E}(X)| \geq \varepsilon]) \leq \frac{\mathbf{V}(X)}{\varepsilon^2}$.

CONVERGENCES

Convergence en probabilité

D $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ lorsque $\forall \varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}([|X_n - X| \geq \varepsilon]) = 0$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}([|X_n - X| < \varepsilon]) = 1$.

P ▶ ⓈⒸ **:** $\left((X_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} X\right) \Leftrightarrow \left((X_n - X)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0\right)$.

▶ ⓈⒸ **:** $\left((X_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} X\right) \not\Leftarrow \left(\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{E}(X_n) = \mathbf{E}(X) \text{ **et** } \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{V}(X_n - X) = 0\right)$.

T $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{E}(X_n) = a \in \mathbb{R} \textbf{ et } \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{V}(X_n) = 0\right) \Rightarrow \left((X_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow{\mathbf{P}} a\right)$.

P (pas vraiment au pgme mais ...)

▶ ⓈⒸ **:** $\left((|X_n|)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0\right) \Leftrightarrow \left((X_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0\right)$.

▶ ⓈⒸ **:** $\left((X_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} X \textbf{ et } (X_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} Y\right) \Rightarrow (X = Y \text{ p.s.})$.

T **Slutsky** (hors programme) ⓈⒸ **:** Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ et si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ alors $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} f(X)$.

P ▶ ⓈⒸ **:** Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} Y$ alors $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(aX_n + bY_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} aX + bY$.

▶ $(X_nY_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} XY$.

▶ $\left(\frac{X_n}{Y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} \frac{X}{Y}$ avec $\mathbf{P}([Y=0]) = 0$.

T **Loi faible des grands nombres**

▶ ⓈⒸ **:** Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *deux à deux non corrélées, (i.e. les covariances deux à deux sont nulles) d'espérance commune m et de variance commune σ^2*. Soit $\overline{X_n} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ alors $\left(\overline{X_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow{\mathbf{P}} m$.

▶ Ⓢ **:** Si $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ alors en posant $F_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ on a : $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbf{P}([|F_n - p| \geq \varepsilon]) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$.

Convergence en loi

D $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ en tout point où F_X est $\mathcal{C}^0$ sur une partie de $\mathbb{R}$.

T ⓈⒸ **:** Soit a et b deux réels tel que $a < b$ on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}([a < X_n \leq b]) = \mathbf{P}([a < X \leq b])$.

T Ⓢ **:** $\left((X_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathcal{L}} X\right) \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N},\ X_n(\Omega) \subset X(\Omega)$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}([X_n = x_k]) = \mathbf{P}([X = x_k]))$.

T **Théorème de la limite centrée (TCL)**

▶ ⓈⒸ **:** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **i.i.d.** alors $(S_n^*)_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow{\mathcal{L}} N$ où $N \hookrightarrow N(0,1)$ où $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, et $S_n^* = \frac{S_n - \mathbf{E}(S_n)}{\sigma(S_n)}$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}([S_n \leq x]) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\,dt$.

▶ Le TCL existe aussi en version moyenne.

T ⓈⒸ **:** $\forall a \in \mathbb{R}$, $\left((X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} a\right) \Rightarrow \left((X_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} a\right)$.

Approximations

T **(Hypergéométrique par binomiale)** $\forall k \in \mathbb{N}$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{H}(N_k, n, p)$ où $n \in \mathbb{N}$ et $p \in]0,1[$ fixés. Supposons que $\forall k \in \mathbb{N}$, pN_k et $N_k(1-p) \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} N_k = +\infty$ alors $(X_k)_{k\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ où $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ (condition : $N \geq 10n$).

T **(Binomiale par Poisson)** $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda$, $\lambda > 0$, alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ où $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ (conditions : $n \geq 30, p \leq 0,1$).

T **(Binomiale par normale)** $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, ainsi $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. Alors $(S_n^*)_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow{\mathcal{L}} N$ où $N \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ avec $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n^* = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ (conditions : $n \geq 30, np \geq 5$ et $nq \geq 5$).

T **(Poisson par normale)** $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda$, $\lambda > 0$, alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ où $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ (condition : $\lambda \geq 15$).

ESTIMATIONS

Estimation ponctuelle

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et θ un réel de Θ une partie de $\mathbb{R}$ et $g : \Theta \longrightarrow \mathbb{R}$.

D Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un $n-$éch d'une var X **i.i.d.**, on appelle **statistique** ou **estimateur de** $g(\theta)$, toute suite de variables $(T_n)_n$ où $\forall n$, $T_n = \varphi_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, fonction de $X_1, X_2, \ldots, X_n$ indépendante de θ. C'est une variable aléatoire réelle.

D On dit que $(T_n)_n$ est **convergent** ou **consistant** de $\boldsymbol{g(\theta)}$ lorsque $(T_n)_n \xrightarrow{\mathbf{P}} g(\theta)$.

D **Biais d'un estimateur par rapport à $\boldsymbol{g(\theta)}$** : $b_{T_n}(\theta) = \mathbf{E}_\theta(T_n - g(\theta))$.

► Si $b_{T_n}(\theta) = 0$, on dit que l'**estimateur est sans bias**.

► Si $\lim\limits_{n\to+\infty} b_{T_n}(\theta) = 0$, on dit que l'**estimateur est asymptotiquement sans bias.**

T Ⓢⓒ **:** Si $b_{T_n}(\theta) = 0$ soit si $\lim\limits_{n\to+\infty} b_{T_n}(\theta) = 0$ **et** $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{V}_\theta(T_n) = 0$ alors (T_n) est convergent soit $(T_n)_n \xrightarrow{\mathbf{P}} g(\theta)$.

D On appelle **risque quadratique moyen** de T_n : $r_{T_n}(\theta) = \mathbf{E}_\theta\left((T_n - g(\theta))^2\right)$.

T Ⓢⓒ **:** $r_{T_n}(\theta) = \mathbf{V}_\theta(T_n) + b_{T_n}^2(\theta)^2$.

T Ⓢⓒ **:** $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} r_{T_n}(\theta) = 0\right) \Rightarrow \left((T_n)_n \xrightarrow{\mathbf{P}} g(\theta)\right)$.

Estimateurs de paramètres usuelles sans biais et convergents

Moyenne empirique Soit n un entier naturel non nul, μ un réel inconnu que l'on cherche à estimer et σ strictement positif.

D Ⓢⓒ **:** $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ où le $n-$ échantillon est tel que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbf{E}(X_k) = \mu$ inconnue.

T Ⓢⓒ **:** $\mathbf{E}\left(\overline{X_n}\right) = \mu$ et $\mathbf{V}\left(\overline{X_n}\right) = \frac{\sigma^2}{n}$ où μ est un réel et

T ► ⓒ **:** $\left(\forall k \in [\![1, n]\!], X_k \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)\right) \Rightarrow \left(\overline{X_n} \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)\right)$ où μ est un réel et σ strictement positif.

► Ⓢⓒ **:** $\left(\forall k \in [\![1, n]\!], X_k \not\hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)\right.$ voire de loi commune ??$\left.\right) \Rightarrow \left(\overline{X_n} \underset{\simeq}{\hookrightarrow} \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)\right)$ par le TCL pour n grand, où μ est un réel et σ strictement positif.

T Ⓢⓒ **:** $\left(\overline{X_n}\right) \xrightarrow{\mathbf{P}} \mu$.

Fréquence empirique Soit $n \in \mathbb{N}^*$, p et q deux réels de $]0, 1[$ inconnus donc à estimer, tel que $p + q = 1$.

D Ⓢ **:** $F_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ où le $n-$ échantillon est tel que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ où p est inconnu.

T $\mathbf{E}(F_n) = p$ et $\mathbf{V}(F_n) = \frac{pq}{n}$.

T Ⓢ **:** $\overline{X_n} \underset{\simeq}{\hookrightarrow} \mathcal{N}\left(p, \frac{pq}{n}\right)$ par le **TCL** pour n *grand*, $np \geq 5$ et $nq \geq 5$.

T Ⓢ **:** $(F_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} p$

Variance empirique Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et θ un réel de Θ une partie de $\mathbb{R}$.

D Ⓢⓒ **:** $S_n^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(X_k - \overline{X_n}\right)^2$ où le $n-$ échantillon est tel que $\forall k$, $\mathbf{E}(X_k) = m$ *connue* et $\mathbf{V}(X_k) = \sigma^2$ *inconnue.*

T Ⓢⓒ **:** $S_n^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k^2 - \left(\overline{X_n}\right)^2$.

T Ⓢⓒ **:** $\mathbf{E}\left(S_n^2\right) = \left(\frac{n-1}{n}\right)\sigma^2$.

T Ⓢⓒ **:** $\left(\frac{n}{n-1}S_n^2\right) \xrightarrow{\mathbf{P}} \sigma^2$.

Estimation par intervalle de confiance de $\boldsymbol{g(\theta)}$ au risque $\boldsymbol{\alpha}$ ($\mathbf{IC}_{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{(\theta)}$)

D L'intervalle aléatoire $[U_n, V_n]$ est un **intervalle de confiance de $\boldsymbol{g(\theta)}$ au niveau $\boldsymbol{1-\alpha}$** si $\mathbf{P}([U_n, V_n] \ni g(\theta)) \geq 1 - \alpha$ autrement dit si $\mathbf{P}([U_n \leq g(\theta) \leq V_n]) \geq 1 - \alpha$ (α est appelé le **risque**).

T $IC_\alpha(p) = \left[\ F_n - u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}} \quad ; \quad F_n + u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}}\ \right]$ et $IC_\alpha(p) \subset \left[\ F_n - \frac{u_{1-\alpha/2}}{2\sqrt{n}} \quad ; \quad F_n + \frac{u_{1-\alpha/2}}{2\sqrt{n}}\ \right]$ (condition $\min(nu_n, nv_n, n(1-u_n), n(1-v_n)) \geq 5$).

T Ⓢⓒ **:** $IC_\alpha(\mu) = \left[\ \overline{X_n} - u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad ; \quad \overline{X_n} + u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \right]$ (condition $n \geq 30$). Si σ est *inconnu*, l'estimer par la réalisation de $\sqrt{\frac{n}{n-1}}S_n$ noté s ce qui donne : $IC_\alpha(\mu) = \left[\ \overline{X_n} - u_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} \quad ; \quad \overline{X_n} + u_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\ \right]$.

LOIS

Loi de Bernoulli Ⓢ

► **Notation :** $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$

► **Paramètre :** $p \in]0, 1[$

► **Epreuve type :** épreuve amenant deux issues seulement : succès ou échec.

► $X(\Omega) = \{0, 1\}$

► $\mathbf{P}([X = 0]) = 1 - p$; $\mathbf{P}([X = 1]) = p$

► $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 - p & \text{si} \quad x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

► $\mathbf{E}(X) = p$

► $\mathbf{V}(X) = p(1 - p)$

► $(X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)) \Longleftrightarrow (1 - X \hookrightarrow \mathcal{B}(1 - p))$

► $(X \hookrightarrow \mathcal{B}(1, p)) \Longleftrightarrow (X \hookrightarrow \mathcal{B}(p))$

► $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ***i.i.d.*** $\mid (\forall k \in [\![1, n]\!], X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p)) \Longrightarrow \left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)\right)$

Variable indicatrice Ⓢ

$\boxed{\mathbf{D}}$ $\forall A \in \mathcal{A}$, $\mathbf{1}_A = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad A \\ 0 & \text{si} \quad \overline{A} \end{cases}$. Par définition *une variable indicatrice est donc une variable de Bernoulli.*

$\boxed{\mathbf{P}}$ $\forall A \in \mathcal{A}$, $\mathbf{E}(\mathbf{1}_A) = \mathbf{P}(A)$, $\mathbf{V}(\mathbf{1}_A) = \mathbf{P}(A)(1 - \mathbf{P}(A))$.

Loi binomiale Ⓢ

▶ **Notation :** $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$

▶ **Paramètres :** $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0, 1[$

▶ **Epreuve type :** succession de n épreuves de **Bernoulli**[2] **indépendantes** et de **même paramètre** p.

▶ $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$

▶ $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbf{P}([X = k]) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

▶ $\mathbf{E}(X) = np$

▶ $\mathbf{V}(X) = np(1-p)$

▶ $(X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)) \Longleftrightarrow (n - X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1-p))$

▶ $(X \hookrightarrow \mathcal{B}(1, p)) \Longleftrightarrow (X \hookrightarrow \mathcal{B}(p))$

▶ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ***i.i.d.*** $\mid (\forall k \in [\![1, n]\!], X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p)) \Longrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p) \right)$

▶ $\mathcal{B}(n_1, p) * \cdots * \mathcal{B}(n_l, p) \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\sum_{k=1}^{l} n_k, p \right)$ (**stabilité** de la loi binomiale pour la **somme** de variables **indépendantes**)

Loi de Dirac Ⓢ

▶ **Notation :** $X \hookrightarrow \delta_c$

▶ **Paramètre :** $c \in \mathbb{R}$

▶ **Epreuve type :** numéro associée à une boule tirée d'une urne ne contenant que des boules ayant le même numéro c.

▶ $X(\Omega) = \{c\}$

▶ $\mathbf{P}([X = c]) = 1$

▶ $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < c \\ 1 & \text{si} \quad x \geq c \end{cases}$

▶ $\mathbf{E}(X) = c$

▶ $\mathbf{V}(X) = 0$

▶ $(\mathbf{V}(X) = 0) \Leftrightarrow (X \hookrightarrow \delta_c)$

▶ $\left(\mathbf{E}\left(X^2\right) = 0\right) \Leftrightarrow (X \hookrightarrow \delta_0)$

Loi exponentielle ⓒ

▶ **Notation :** $X \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)$

▶ **Paramètre :** $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$

[2] Une épreuve de Bernoulli est une épreuve à deux issues seulement.

▶ **Epreuve type :** temps d'attente entre deux phénomènes indépendants tels que des arrivées à un guichet, ou des appels téléphoniques.

▶ $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$

▶ $f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

▶ $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

▶ $\mathbf{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$

▶ $\mathbf{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

▶ $(X \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)) \Leftrightarrow \left(\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2,\ \mathbf{P}_{[X > x]}([X > x + y]) = \mathbf{P}([X > y]) \right)$ **(abscence de mémoire)** ce qui s'est passé sur l'intervalle $]-\infty, x]$ n'affecte en rien ce qui se passera sur l'intervalle $]x, x + y]$

▶ $\varepsilon(\lambda) = \Gamma\left(\frac{1}{\lambda}, 1\right)$

▶ $\underbrace{\varepsilon(\lambda) * \cdots * \varepsilon(\lambda)}_{n \text{ fois}} = \Gamma\left(\frac{1}{\lambda}, n\right)$

▶ Soit $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda x)$ et $X \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)$ alors $\mathbf{P}([X > x]) = \mathbf{P}([Y = 0])$

▶ Si $X \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)$ alors $\lfloor X \rfloor \hookrightarrow \mathcal{G}_{\mathbf{N}}(p)$ (hors programme mais ...)

Loi grand gamma ⓒ

▶ **Notation :** $X \hookrightarrow \Gamma(b, t)$

▶ **Paramètres :** $b \in \mathbb{R}_+^*$, $t \in \mathbb{R}_+^*$

▶ $X(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$

▶ $f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{e^{-\frac{x}{b}} x^{t-1}}{\Gamma(t) b^t} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

▶ $\mathbf{E}(X) = bt$

▶ $\mathbf{V}(X) = b^2 t$

▶ $\forall (t_1, t_2) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, $\int_0^1 v^{t_1 - 1} (1 - v)^{t_2 - 1}\, du = \frac{\Gamma(t_1)\Gamma(t_2)}{\Gamma(t_1 + t_2)}$

▶ $\Gamma(1, t) = \gamma(t)$

▶ $\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}, 1\right) = \varepsilon(\lambda)$

▶ $(X \hookrightarrow \gamma(t)) \Longleftrightarrow (bX \hookrightarrow \Gamma(b, t))$

▶ $(X \hookrightarrow \Gamma(b, t)) \Longleftrightarrow \left(\frac{X}{b} \hookrightarrow \gamma(t)\right)$

▶ $(X \hookrightarrow \Gamma(b, t)) \Longleftrightarrow \left(b'X \hookrightarrow \Gamma(bb', t) \text{ où } b' \in \mathbb{R}_+^*\right)$

▶ $\Gamma(b, t_1) * \cdots * \Gamma(b, t_n) = \Gamma\left(b, \sum_{k=1}^{n} t_k\right)$

▶ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ***i.i.d.*** $\mid (\forall k \in [\![1, n]\!], X_k \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)) \Longrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} X_k^2 \hookrightarrow \Gamma\left(2, \frac{n}{2}\right) \right)$ (loi du chi-deux à n degrés de liberté, hors programme mais ...)

▶ $(X \hookrightarrow \Gamma(b,n) \text{ et } n \geq 30) \Longrightarrow \left(X \underset{\simeq}{\hookrightarrow} \mathcal{N}\left(bn, b^2 n\right)\right)$ (hors programme mais ...)

Loi petit gamma ©

▶ **Notation :** $X \hookrightarrow \gamma(t)$

▶ **Paramètre :** $t \in \mathbb{R}_+^*$

▶ $X(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$

▶ $f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{e^{-x} x^{t-1}}{\Gamma(t)} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

▶ $\mathbf{E}(X) = t$

▶ $\mathbf{V}(X) = t$

▶ $\gamma(t) = \Gamma(1,t)$

▶ $\underbrace{\gamma(t_1) * \cdots * \gamma(t_n)}_{n \text{ fois}} = \gamma\left(\sum_{k=1}^{n} t_k\right)$

Loi géométrique Ⓢ

▶ **Notation :** $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$

▶ **Paramètre :** $p \in]0,1[$

▶ **Epreuve type :** c'est le rang d'apparition du premier succès lors d'une **succession illimitée** d'épreuves de Bernoulli.

▶ $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

▶ $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}([X = k]) = q^{k-1} p$ avec $q = 1 - p$

▶ $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ 1 - q^k & \text{si} \quad x \in [k, k+1[, \quad k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ avec $q = 1 - p$

▶ $\mathbf{E}(X) = \frac{1}{p}$

▶ $\mathbf{V}(X) = \frac{q}{p^2}$ avec $q = 1 - p$

▶ $(X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)) \Leftrightarrow (\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \mathbf{P}_{[X>n]}([X > m+n]) = \mathbf{P}([X > m]))$ **(abscence de mémoire)** ce qui s'est passé sur l'intervalle $]-\infty, n]$ n'affecte en rien ce qui se passera sur l'intervalle $]n, n+m]$.

▶ $\underbrace{\mathcal{G}(p) * \cdots * \mathcal{G}(p)}_{n \text{ fois}} = \mathcal{P}(r,p)$ (loi de Pascal) (Hors programme mais ...)

Loi hypergéométrique Ⓢ

▶ **Notation :** $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N,n,p)$

▶ **Paramètres :** $N \in \mathbb{N}^*$, $n \in [\![0,N]\!]$, $p \in]0,1[\mid (Np, N(1-p)) \in \mathbb{N}^2$

▶ **Epreuve type :** c'est le nombre de boules blanches obtenues à partir d'une succession de n tirages efféctués sans remise à partir d'une urne bicolore.

▶ $X(\Omega) = [\![\max(0, n - Nq), \min(Np, n)]\!]$

▶ $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\mathbf{P}([X = k]) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

▶ $\mathbf{E}(X) = np$

▶ $\mathbf{V}(X) = np(1-p)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ (savoir retrouver)

▶ **Approximation :** $(X \hookrightarrow \mathcal{H}(N,n,p) \text{ et } N \geq 10n) \Rightarrow (X \underset{\simeq}{\hookrightarrow} \mathcal{B}(n,p))$

Loi normale centrée et réduite ou de Laplace-Gauss ©

▶ **Notation :** $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

▶ **Paramètres :** 0 et 1

▶ $X(\Omega) = \mathbb{R}$

▶ $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$

▶ **Intégrale de Gauss**

▶ $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$

▶ $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

▶ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ (intégrale tabulée)

▶ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ (ie $\Phi - \frac{1}{2}$ est impaire)

▶ $\Phi(0) = 1/2$

▶ **Mode :** 0

▶ **Médiane :** 0

▶ $\mathbf{E}(X) = 0$

▶ $\mathbf{V}(X) = 1$

▶ $\mathbf{E}(X^n) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \in 2\mathbb{N}+1 \\ \frac{(2m)!}{2^m m!} & \text{si} \quad n = 2m \in 2\mathbb{N} \end{cases}$ (à retrouver !)

▶ $\left(\frac{X-m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)\right) \Leftrightarrow \left(X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)\right)$

▶ **Stabilité de la loi normale** pour la **somme** de variables **indépendantes**

♦$\underbrace{\mathcal{N}(0,1) * \cdots * \mathcal{N}(0,1)}_{n \text{ fois}} = \mathcal{N}(0,n)$

♦$\underbrace{\mathcal{N}\left(m,\sigma^2\right) * \cdots * \mathcal{N}\left(m,\sigma^2\right)}_{n \text{ fois}} = \mathcal{N}\left(nm, n\sigma^2\right)$

♦$X_1, X_2, \ldots, X_n$ ***i.i.d.*** $\mid (\forall k \in [\![1,n]\!], X_k \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)) \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} X_k^2 \hookrightarrow \Gamma\left(2, \frac{n}{2}\right)\right)$ (hors programme mais ...)

▶ **Approximations :**

$\left(\begin{cases} X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p) \\ n \geq 30 \quad np \geq 5 \quad n(1-p) \geq 5 \end{cases}\right) \Rightarrow \left(X \underset{\simeq}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(np, np(1-p))\right)$

$\left(\begin{cases} X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda) \\ \lambda \geq 15 \end{cases}\right) \Rightarrow \left(X \underset{\simeq}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(\lambda, \lambda)\right)$

Loi normale quelconque ou de Laplace-Gauss ©

▶ **Notation :** $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$

▶ **Paramètres :** $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+^*$
▶ $X(\Omega) = \mathbb{R}$
▶ $\forall x \in \mathbb{R},\ f_X(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$
▶ **Mode :** m
▶ **Médiane :** m
▶ $\mathbf{E}(X) = m$
▶ $\mathbf{V}(X) = \sigma^2$
▶ $\left(X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)\right) \Longleftrightarrow \left(\dfrac{X-m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)\right)$ (théorème fondamental de la loi noramle)
▶ $\mathcal{N}\left(m_1, \sigma_1^2\right) * \cdots * \mathcal{N}\left(m_n, \sigma_n^2\right) = \mathcal{N}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} m_k, \sum\limits_{k=1}^{n} \sigma_k^2\right)$ (**stabilité** de la loi normale pour la **somme** de variables **indépendantes**)
▶ **Approximations :**
♦ $\left(\begin{cases} X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p) \\ n \geq 30 \quad np \geq 5 \quad n(1-p) \geq 5 \end{cases}\right) \Rightarrow \left(X \underset{\simeq}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(np, np(1-p))\right)$
♦ $\left(\begin{cases} X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda) \\ \lambda \geq 15 \end{cases}\right) \Rightarrow \left(X \underset{\simeq}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(\lambda, \lambda)\right)$
♦ $\left((X_n)_{n\geq 1}\ \boldsymbol{i.i.d.}\right) \Rightarrow \left(\left(\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - \mathbf{E}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right)}{\sigma\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right)}\right)_{n\geq 1} \xrightarrow{\mathcal{L}} N \text{ où } N \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)\right)$ **(TCL)**

Loi de Poisson Ⓢ
▶ **Notation :** $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$
▶ **Paramètre :** $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$
▶ **Epreuve type :** nombre d'apparitions d'un phénomène rare durant un intervalle de temps donné.
▶ $X(\Omega) = \mathbb{N}$
▶ $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}([X=k]) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$
▶ $\mathbf{E}(X) = \lambda$
▶ $\mathbf{V}(X) = \lambda$
▶ $\mathcal{P}(\lambda_1) * \cdots * \mathcal{P}(\lambda_n) = \mathcal{P}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k\right)$ (**stabilité** de la loi de Poisson pour la **somme** de variables **indépendantes**)
▶ $\mathbf{P}([X=0]) = 1 - F_Y(1)$ où $Y \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)$
▶ Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda x)$ et $Y \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)$ alors $\mathbf{P}([X > x]) = \mathbf{P}([Y = 0])$
▶ **Approximations :**
♦ $\left(\begin{cases} X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda) \\ \lambda \geq 15 \end{cases}\right) \Rightarrow \left(X \underset{\simeq}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(\lambda, \lambda)\right)$
♦ $(X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ et $n \geq 30, p < 0.1) \Rightarrow \left(X \underset{\simeq}{\hookrightarrow} \mathcal{P}(np)\right)$

Loi uniforme continue ⓒ
▶ **Notation :** $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$
▶ **Paramètre :** $[a,b]$ où $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$.
▶ $X(\Omega) = [a,b]$
▶ $f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a \\ \frac{1}{b-a} & \text{si} \quad x \in [a,b] \\ 0 & \text{si} \quad x > b \end{cases}$
▶ $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si} \quad x \in [a,b] \\ 1 & \text{si} \quad x > b \end{cases}$
▶ $\mathbf{E}(X) = \frac{a+b}{2}$
▶ $\mathbf{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
▶ $(X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])) \Leftrightarrow ((b-a)X + a \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b]))$
▶ $(X \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1])) \Rightarrow \left(-\frac{1}{\lambda}\ln X \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)\right)$

Loi uniforme discrète Ⓢ
▶ **Notation :** $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1,n \rrbracket)$ $n \geq 1$
▶ **Paramètre :** $\llbracket 1,n \rrbracket$
▶ **Epreuve type :** numéro d'une boule tirée d'une urne constituée de boules numérotées de 1 à n.
▶ $X(\Omega) = \llbracket 1,n \rrbracket$
▶ $\forall k \in \llbracket 1,n \rrbracket,\ \mathbf{P}([X=k]) = \frac{1}{n}$
▶ $\mathbf{E}(X) = \frac{n+1}{2}$
▶ $\mathbf{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$
▶ **Si** $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket a,b \rrbracket)$ avec $a \leq b$ **alors** $X - a + 1 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, b-a+1 \rrbracket)$ et $\mathbf{E}(X) = \frac{a+b}{2}$ et $\mathbf{V}(X) = \frac{(b-a+1)^2-1}{12}$

Légendes et abréviations
▶ $\boxed{\mathbf{D}}$ Définition.
▶ $\boxed{\mathbf{T}}$ Théorème.
▶ $\boxed{\mathbf{P}}$ Propriété (s).
▶ $\boxed{\mathbf{C}}$ Corollaire.
▶ $\boxed{\mathbf{R}}$ Remarque.
▶ ⓒ **:** valable en continu.
▶ Ⓢ **:** valable en discret.
▶ $|E|$: cardinal de E.

▶ ssrcv : sous réserve de convergence.

▶ ssr|cv| : sous réserve de convergence absolue.

▶ i.i.d. : variables indépendantes et identiquement distribuées.

▶ SCE : système complet d'événements.

▶ v.a.r.d. : variable aléatoire discrète.

▶ v.a.r.a.d. : variable aléatoire à densité.

▶ $\sum_i u_i < +\infty$: série simple convergente

▶ $\sum_{i,j} u_{i,j} < +\infty$: série double convergente

▶ $A \perp\!\!\!\perp B$: A et B indépendants.

▶ $X \perp\!\!\!\perp Y$: X et Y indépendantes.

▶ $X_1 \perp\!\!\!\perp \ldots \perp\!\!\!\perp X_n$: $X_1, \ldots, X_n$ mutuellement indépendantes.

▶ $\forall k \geq 1$, $\mathcal{L}^k$ (respectivement $\mathcal{L}_d^k$) espace vectoriel des variables (discrètes) admettant un moments d'ordre k.

▶ P_X : loi de X.