QSP de probas anciennes et à venir !
ECS 2

Spicesagros.fr

30 janvier 2014

Table des matières

Une petite introduction

Voici une anthologie de 86 exercices tous corrigés avec le plus grand soin, qui vous prépareront à l'épreuve tant redoutée de la question sans préparation donnée à HEC et à l'ESCP. Certains sujets n'ont jamais été édités et d'autres ont fait l'objet d'un choix très méticuleux de ma part, correspondant à des thèmes inédits et qui pourront tomber d'ici peu. A bon entendeur ... Ces sujets couvrent l'intégralité des chapitres du programme de probabilités des deux années en voie scientifique. Ils pourra servir aussi aux étudiants de PC et de MP hormis les chapitres sur les variables à densité. Je dis souvent à mes étudiants que s'entraîner sur des QSP consitue un excellent exercice d'entraînement tout au long de l'année pour affiner ses connaissances et surtout apprendre à rassembler ses idées en un minimum de temps. Des étoiles ★ vous donneront une idée de la difficulté de chaque exercice : (★) exercice simple, (★★) exercice de difficulté moyenne, (★★★) exercice difficile. Cela reste bien sûr subjectif selon le niveau de chacun !

Ce modeste document de 71 pages livré à la communauté des préparationnaires et professeurs peut être utilisable par tous, mais son usage à titre commercial est strictement interdit.

Première partie

Enoncés

(Chapter head:)Sujets de QSP et de celles qui vont tomber ...

1. (★) **ESCP** Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$.

2. (★★) **HEC**

   (a) Soit $x\in\mathbb{R}$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^n}\mathbf{1}_{\left[\frac{1}{n},+\infty\right[}(x)$ est convergente.

   (b) On pose $F(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\mathbf{1}_{\left[\frac{1}{n},+\infty\right[}(x)$.

      i. Tracer le graphe de F sur $[1/4,+\infty[$.

      ii. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire dont on donnera la loi.

3. (★★) Convergence et somme de la série double :

$$\sum_{p\geq 0,q\geq 1}\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$$

   On admettra que :

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{i^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

   Indication : on pourra utiliser la décomposition pour tout q fixé dans $\mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}=\frac{1}{p+q^2}-\frac{1}{p+q^2+1}$$

4. (★★) On considère deux variables aléatoires discrètes A et B à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Leur loi de probabilité conjointe est de la forme :

$$\forall (a,b)\in\mathbb{Z}^2,\quad \mathbf{P}([A=a]\cap[B=b])=Ke^{-|a|-|b|}$$

   (a) Déterminer la valeur de K.

   (b) Calculer l'espérance du discriminant du polynôme $(X-A)(X-B)$.

5. (★★) Soit X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p. On définit une variable aléatoire Y de la façon suivante :

$$\forall\omega\in\Omega,\quad Y(\omega)=\begin{cases} X(\omega) & \text{si} \quad X(\omega)\ \text{est impaire}\\ X(\omega)/2 & \text{si} \quad X(\omega)\ \text{est paire}\end{cases}$$

   Déterminer la loi de Y.

6. (★★★) Soit X et Y des variables aléatoires positives admettant un moment d'ordre deux sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P})$.

   (a) A quelle condition a-t-on $\mathbf{E}(X^2)=0$? On exclut cette possibilité par la suite.

   (b) En considérant la fonction $t\mapsto\mathbf{E}\left((X+tY)^2\right)$, retrouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$(\mathbf{E}(XY))^2\leq\mathbf{E}(X^2)\,\mathbf{E}(Y^2)$$

   (c) Montrer que pour tout $a\in[0,1]$:

$$(1-a)\,\mathbf{E}(X)\leq\mathbf{E}\left(X\mathbf{1}_{[a\mathbf{E}(X),+\infty[}(X)\right)$$

(d) En déduire que pour tout $a \in [0,1]$:

$$\mathbf{P}([X \geq a\mathbf{E}(X)]) \geq (1-a)^2 \frac{(\mathbf{E}(X))^2}{\mathbf{E}(X^2)}$$

7. (★★) **HEC** Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On considère deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\{1,\dots,n+1\}$ telles que :

$$\forall (i,j) \in \{1,\dots,n+1\}^2, \quad \mathbf{P}([X=i]\cap[Y=j]) = \frac{\binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}}{2^{2n}}$$

   (a) Déterminer la loi de X son espérance et sa variance.

   (b) Soit la matrice $M = (m_{i,j})$ avec $m_{i,j} = \mathbf{P}_{[X=j]}([Y=i])$. Calculer M^2 et déterminer les valeur propres de M.

8. (★★) Montrer que la série double $\sum\limits_{(i,j)} a_{i,j}$ définie pour tout couple (i,j) de $\mathbb{N}^2$, par $a_{i,j} = \dfrac{i+j}{i!j!2^{i+j}}$ est convergente et calculer sa somme.

9. (★★) **HEC** Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P})$ suivant toutes deux une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Pour tout ω dans Ω on considère la matrice :

$$M(\omega) = \begin{bmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{bmatrix}$$

Déterminer la probabilité $\mathbf{P}\{\omega \in \Omega \mid M(\omega) \text{ inversible}\}$.

10. (★) **HEC** Soit X et Y deux variables indépendantes suivant chacune la loi de Poisson de paramètre 1.

   (a) Soit s un entier naturel. Déterminer la loi de X conditionnée par $[X+Y=s]$.

   (b) A l'aide de la formule de l'espérance totale, retrouver l'espérance de X.

11. (★★) On considère X une variable à densité paire f_X et Y une variable indépendante de X suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. Soit a et b deux nombres réels non nuls et $Z = |X|(aY + b(1-Y))$.
Calculer une densité de Z.

12. (★★) Soit X et Y des v.a.r. indépendantes telles que $X \hookrightarrow \varepsilon(a)$ et $Y \hookrightarrow \varepsilon(b)$. On considère la v.a.r. $Z = \lambda X + \mu Y$ où λ et μ sont deux réels quelconques.

   (a) Déterminer une densité de la variable Z et en donner une représentation graphique.

   (b) Etant donnés m un réel quelconque et $\sigma > 0$, quelles doivent être les valeurs de λ et μ (en fonction des autres paramètres) pour que $\mathbf{E}(Z) = m$ et $\mathbf{V}(Z) = \sigma^2$.

13. (★★) **ESCP** Soit X une variable aléatoire de densité $x \mapsto \dfrac{1}{\ln 2}\dfrac{1}{1+x}\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$. Montrer que $Y = \dfrac{1}{X} - \left\lfloor \dfrac{1}{X} \right\rfloor$ suit la même loi que X.

14. (★★★) **ESCP** Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes, de même loi et admettant une espérance. Montrer que :

$$\mathbf{E}\left(\frac{X}{X+Y}\right) = \frac{\mathbf{E}(X)}{\mathbf{E}(X+Y)}$$

15. (★★) **ESCP** On étudie la peinture de n carrosseries de voitures. La probabilité que la peinture soit parfaite est de 0.75. On définit pour chaque entier naturel k de $\{1, \dots, n\}$:

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{si la peinture est imparfaite} \\ 0 & \text{si la peinture est parfaite} \end{cases}$$

   (a) Que dire de la suite $\left(\mathbf{P}\left(\left[\left|\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - \dfrac{n}{4}\right| \geq \dfrac{n}{2}\right]\right)\right)_{n \geq 1}$?

   (b) Calculer $\text{Cov}\,(X_1 + X_2, X_1 - X_2)$.

16. (★★) **HEC** On effectue une suite d'épreuves indépendantes, chacune d'elles étant un succès avec la probabilité $p \in \left]0, 1\right[$.

   (a) Soit T_n la variable aléatoire égale au nombre d'échecs précédant le $n^{\text{ème}}$ succès, $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi de T_n appelée *loi binomiale négative.*

   (b) Montrer la convergence en loi de $(T_n)_n$ dans le cas où $p = 1 - \lambda/n$, $\lambda \in \left]0, n\right[$.

17. (★★) **HEC** Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $[0, +\infty[$ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes et de même loi. On suppose qu'il existe deux réels $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$ tels que :

$$\mathbf{P}\left([X_1 > x]\right) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{\alpha}{x^{\lambda}}$$

   Montrer que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$\forall n \geq 1, \quad Z_n = n^{-1/\lambda} \sup\left(X_1, \dots, X_n\right)$$

   converge en loi vers une loi à déterminer.

18. (★★) **ESCP** Soit T_1 et T_2 deux estimateurs indépendants, sans biais de θ, de variances respectives V_1 et V_2. Pour tout a réel, on pose :

$$\Theta_a = aT_1 + (1 - a)\,T_2$$

   (a) Θ_a est-il estimateur sans biais de θ ?

   (b) Déterminer a pour que la variance de Θ_a soit minimale. Quelle est la valeur de cette variance ?

19. (★★) Soit n un entier naturel non nul et $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon identiquement distribué indépendant de loi de Poisson de paramètre inconnu $\lambda > 0$. On pose :

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \quad \text{et} \quad T_n = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X_n} - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$$

   A l'aide de T_n, déterminer, pour n grand, un intervalle de confiance de λ au risque α donné.

20. (★★) Calculer, pour $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{q} \frac{p}{p + q - k} \times \frac{\binom{q}{k}}{\binom{p+q}{k}}$.

21. (★) Donner la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{n^3 - 1}{n!}$ et calculer sa somme en cas de convergence.

22. Un démarcheur dépose au hasard p prospectus identiques dans n boîtes aux lettres distinctes (on suppose que chaque boîte peut recevoir plusieurs prospectus et que $p \geq n$). Combien obtient-on de configurations pour lesquelles il y a une seule boîte vide ?

23. (★★) *Une inégalité injustement méconnue.*
   Sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, on note A un événement quelconque et B un événement tel que $0 < \mathbf{P}(B) < 1$.

(a) Montrer que $\left|\mathbf{P}(A\cap B)-\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\right| \leq \dfrac{1}{4}\left|\mathbf{P}_B(A)-\mathbf{P}_{\overline{B}}(A)\right|.$

(b) Que donne l'inégalité lorsque $A\subset B$?

(c) Dans quels cas a-t-on une égalité ?

24. (★★★) **ESCP** Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p. Déterminer la loi de :

$$Z=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{X\cos\theta+XY+1}$$

25. (★★) Soit X une variable d'espérance nulle et de variance égale à σ^2. Montrer que :

$$\forall t>0,\quad \mathbf{P}([X\geq t])\leq\frac{\sigma^2}{\sigma^2+t^2}$$

26. (★★) **HEC** Soit X et Y deux variables définies sur un même espace probabilisé indépendantes et suivant toutes deux la même loi binomiale $\mathcal{B}(n,1/2)$. On considère la matrice aléatoire M définie par :

$$\forall\omega\in\Omega,\quad M(\omega)=\begin{bmatrix} X(\omega) & 1\\ 0 & Y(\omega)\end{bmatrix}$$

Calculer la probabilité de l'événement : "$M(\omega)$ est diagonalisable".

27. (★★) En utilisant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$ et après avoir montré que la série double de terme général $\dfrac{1}{p^2q^2}$ où $p\geq 1$, $q\geq 1$ et p divise q (noté $p\mid q$) est convergente, calculer :

$$\sum_{\left\{\substack{(p,q)\in(\mathbf{N}^*)^2\\ p\mid q}\right.}\frac{1}{p^2q^2}$$

28. (★★) Soit U,V,X et Y quatre variables aléatoires discrètes indépendantes possédant un moment d'ordre deux. On suppose que ces VAR ont la même espérance μ et la même variance σ^2. On considère la matrice aléatoire A définie par :

$$\forall\omega\in\Omega,\quad A(\omega)=\begin{bmatrix} U(\omega) & X(\omega)\\ V(\omega) & Y(\omega)\end{bmatrix}$$

Vérifier que $R=\det A\left({}^tA\right)$ est une VAR. Montrer que R admet une espérance et la calculer en fonction de μ et σ^2.

29. (★★) On considère n variables de Bernoulli indépendantes $U_1,\ldots,U_n$ de même loi, de paramètre p $(p\in]0,1[)$, $n\geq 4$. Calculer :

(a) $\mathbf{E}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}U_k\right)$ et $\mathbf{V}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}U_k\right)$.

(b) $\mathbf{P}_{[U_2=0]\cap[U_4=1]}\left(\left[\sum\limits_{i=1}^{n}U_i=k\right]\right)$.

(c) $\mathbf{P}_{\left[\sum_{i=1}^{n}U_i>0\right]}\left(\left[\sum\limits_{i=1}^{n}U_i=k\right]\right)$.

(d) $\mathbf{P}\left([U_1\leq U_2\leq\cdots\leq U_n]\right)$.

30. (★★) **HEC** Soit X une variable aléatoire normale centrée et réduite. Donner la loi de $Y=\sqrt[3]{|X|}$.

31. (★★) **HEC** Soit f définie par $f(x) = e^{-(x-1)}\mathbf{1}_{]1,+\infty[}(x)$.
   (a) Prouver que f est la densité d'une variable X.
   (b) Soit Y une variable indépendante de X et suivant la loi uniforme sur $[0,2]$. Déterminer la loi de $X+Y$.

(32) (★★)
   (a) Déterminer la loi de $Y = \sin(\pi X)$, si X suit une loi uniforme sur $[0,1[$.
   (b) Déterminer la loi de $Z = \tan\theta$, où θ suit une loi uniforme sur $]-\pi/2, \pi/2[$.
   Indication on pourra utiliser la fonction Arcsin *à la première question.*

(33) (★★★) **HEC** Les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On considère n variables aléatoires à densité, de même loi et indépendantes $X_1, \ldots, X_n$. On note F la fonction de répartition et f une densité des X_i. Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $(Y_1(\omega), Y_2(\omega), \ldots, Y_n(\omega))$ la suite des $X_i(\omega)$ pour $1 \leq i \leq n$ réordonnés par ordre croissant. On a donc $Y_1(\omega) \leq Y_2(\omega) \leq \cdots \leq Y_n(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$.
   (a) Si $1 \leq k \leq n$ et $x \in \mathbb{R}$, montrer que :
$$\mathbf{P}([Y_k \leq x]) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} F(x)^j (1-F(x))^{n-j}$$
   (b) En déduire que Y_k admet une densité qu'on explicitera sans signe $\sum$.

(34) (★★) Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et suivant la même loi uniforme sur $\left\{\dfrac{k\pi}{3} \mid k \in [\![0,5]\!]\right\}$. On pose $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \cos(Y_i)$. Montrer que $\left(\dfrac{S_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 0.

(35) (★) Soit X une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre deux.
Montrer que $\mathbf{V}(X) = \min\limits_{t\in\mathbb{R}} \mathbf{E}\left((X-t)^2\right)$.

(36) (★) Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi normale centrée réduite. Calculer la loi de $Z = e^X$.

(37) (★) Soit X une variable aléatoire réelle positive admettant une espérance.
Montrer que $\mathbf{E}(X) = \int_0^{+\infty} (1-F(t))\,dt$.

(38) (★) Soit X et Y deux variables aléatoires réelles à densité. Montrer que $\mathbf{P}([X=Y]) = 0$.

(39) (★★★)
   (a) Montrer que pour tout $x > 0$,
$$\forall x > 0, \quad e^{-x^2/2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) \leq \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}dt \leq \frac{e^{-x^2/2}}{x}$$
   Indication : on pourra intégrer par parties $t \mapsto t^{-1} t e^{-t^2/2}$.
   (b) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi normale centrée réduite. Montrer que $\dfrac{\max\limits_{1\leq i\leq n}(X_i)}{\sqrt{2\ln n}}$ tend vers 1 en probabilité.

(40) (★★) **HEC** Comparer $\mathbf{V}(X)$ et $\mathbf{V}(Y)$ où $Y = |X|$ sachant que X est une variable à densité admettant un moment d'ordre deux.

(41) (★★) **HEC** Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto \exp(t - e^t)$ est une densité de probabilité.

(42) (★★) **HEC** Soit X une variable à valeurs positives ou nulles et admettant une densité f continue sur $\mathbb{R}_+$. On suppose de plus que f admet un moment d'ordre deux.

(a) Etudier le comportement de $x^2\mathbf{P}([X \geq x])$ lorsque x tend vers $+\infty$.

(b) Etablir une relation entre $\mathbf{E}(X^2)$ et $\int_0^{+\infty} x\mathbf{P}([X \geq x])\,dx$.

(c) Prouver que :

$$\left(\int_0^{+\infty} \mathbf{P}([X \geq x])\,dx\right)^2 \leq 2\int_0^{+\infty} x\mathbf{P}([X \geq x])\,dx$$

(43) (★★) **HEC** Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. On note Φ sa fonction de répartition. Etudiez la convergence et éventuellement la valeur de :

$$I = \int_0^{+\infty} x\mathbf{P}([X \geq x])\,dx$$

(44) (★★) **HEC** On considère une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_k)_{k\geq 1}$, indépendantes et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Soit N une variable aléatoire définie sur le même espace et suivant la loi géométrique de paramètre $p \in \,]0,1[$. On pose :

$$S = X_1 + \cdots + X_N$$

(a) Déterminer la loi conditionnelle de S sachant $[N = n]$.

(b) En déduire la fonction de répartition de S puis la loi de S. Vérifier que :

$$\mathbf{E}(S) = \mathbf{E}(N)\,\mathbf{E}(X_1)$$

(45) (★★) **HEC** Soit f une densité de probabilité continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs strictement positives. On considère n variables aléatoires indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ $(n \geq 1)$, de même densité f. On note F la fonction de répartition commune des X_i, $1 \leq i \leq n$. On note également :

$$U_n = \min_{1\leq i\leq n}(X_i) \quad \text{et} \quad V_n = F(U_n)$$

(a) Justifier que V_n est une variable aléatoire à densité.

(b) Exprimer φ la fonction de répartition de U_n.

(c) Exprimer ψ celle de V_n uniquement en fonction de n.

(46) (★★) **HEC** Déterminer une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires, chacune prenant deux valeurs, telle que la suite converge en probabilité vers la variable nulle mais que la suite $(\mathbf{E}(X_n))_{n\geq 1}$ converge vers 1 et la suite $(\mathbf{V}(X_n))_{n\geq 1}$ tend vers $+\infty$.

(47) (★★) **HEC** Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et admettant une espérance.

(a) Montrer que $\dfrac{1}{X}$ admet une espérance.

(b) Montrer que quel que soit le réel t, $\left(t\sqrt{X} + \dfrac{1}{\sqrt{X}}\right)^2$ admet une espérance.

(c) En déduire que : $\mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}\left(\dfrac{1}{X}\right) \geq 1$. Dans quel cas y a-t-il égalité ?

(48) (★★) **HEC** Déterminer le mode d'une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre 4.

(49) (★★) **HEC** Soit n un entier naturel non nul. Une urne contient n boules blanches et n noires. On tire les boules de l'urne une à une sans remise, jusqu'à l'obtention de la dernière blanche. X désigne le nombre de tirages nécessaires. Donner la loi de X et son espérance.

(50) (★★) **ESCP** Soit (X_n) une suite de variables aléatoires qui converge en loi vers une variable aléatoire X. A-t-on $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{E}(X_n) = \mathbf{E}(X)$?

(51) (★★) **ESCP** Soit X une variable aléatoire à densité f paire et continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que X^2 suit une loi exponentielle $\varepsilon(\lambda)$. Déterminer f.

(52) (★★) **ESCP** Soit X une variable à densité définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$ et F sa fonction de répartition. On suppose que :
- F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- X admet une espérance $\mathbf{E}(X)$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x(1 - F(x) + F(-x)) = 0$.

Montrer que $\mathbf{E}(X) = \int_0^{+\infty} (1 - F(x) + F(-x))\, dx$.

(53) (★★) Soit (X_n) une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé et X une variable aléatoire définie également sur cet espace. On suppose que (X_n) converge en loi vers X, la suite $(X_n - X)$ converge-t-elle nécessairement en loi vers la variable certaine nulle ?

(54) (★★) **ESCP** Soit X une variable aléatoire strictement positive de densité f. On suppose que X et $1/X$ admettant une espérance. Comparer $\mathbf{E}\left(\dfrac{1}{X}\right)$ et $\dfrac{1}{\mathbf{E}(X)}$.

(55) (★★) **HEC** Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+^*$.

(a) On suppose que la variable aléatoire $X + \dfrac{1}{X}$ admet une espérance. Montrer que X admet une espérance.

(b) La réciproque est-elle vraie ?

(56) (★★) **HEC** Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

(a) Montrer que pour tout entier $n > \lambda - 1$, on a :

$$\mathbf{P}([X \geq n]) \leq \mathbf{P}([X = n]) \times \frac{n+1}{n+1-\lambda}$$

(b) En déduire que $\mathbf{P}([X \geq n]) \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathbf{P}([X = n])$.

(c) Montrer que $\mathbf{P}([X > n]) = o(\mathbf{P}([X = n]))$ lorsque n tend vers l'infini.

(57) **HEC** Les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et soit Y une variable aléatoire indépendante de X telle que $Y(\Omega) = \{1, 2\}$, $\mathbf{P}([Y = 1]) = \mathbf{P}([Y = 2]) = 1/2$. On pose $Z = XY$.

(a) Déterminer la loi de Z.

(b) Quelle est la probabilité que Z prenne des valeurs paires ?

(58) Soit X et Y deux variables vérifiant $\operatorname{Card} X(\Omega) \leq 2$ et $\operatorname{Card} Y(\Omega) \leq 2$. Montrer que l'on a : X et Y indépendantes en probabilité si et seulement si $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0$.

(59) Supposons A indépendant de $B \cap C$ et de $B \cup C$, puis B indépendant de $C \cap A$ et enfin C indépendant de $A \cap B$. Supposons, en outre, $\mathbf{P}(A)$, $\mathbf{P}(B)$, $\mathbf{P}(C)$ strictement positifs. Alors A, B, C sont mutuellement indépendants.

(60) Soit X une variable aléatoire. Montrer que si $\mathbf{E}(|X|) = 0$, alors $X = 0$ p.s.

(61) Soit X une variable aléatoire et r un nombre réel strictement positif tel que $\mathbf{E}(|X|^r) < +\infty$. Montrer que $\mathbf{P}([|X| \geq n]) = o(1/n^r)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

(62) Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires tel que $\mathbf{V}(X) = \mathbf{V}(Y) < +\infty$. Montrer qu'alors les variables aléatoires $X + Y$ et $X - Y$ sont non corrélées.

(63) Soit X, Y, Z trois variables aléatoires indépendantes, chacune de loi uniforme sur $[0, 1]$. Calculer une densité de probabilité de $X + Y$, $X + Y + Z$, $X - Y$.

(64) Soit U une variable aléatoire uniformément répartie sur $[0, 1]$ et $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes aynat chacune la même loi que U. Soit d'autre part Y une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1. Pour tout $n \geq 1$, on pose $Z_n = n \inf(U_1, \ldots, U_n)$. Montrer que $(Z_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$.

(65) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, toutes exponentielles de même paramètre $\lambda > 0$. Déterminer les limites en loi des suites de terme général :

(a) $A_n = n \inf\left(e^{-\lambda X_1}, \ldots, e^{-\lambda X_n}\right)$.

(b) $B_n = n^{1/\lambda} \inf\left(e^{-X_1}, \ldots, e^{-X_n}\right)$.

(c) $C_n = n^{-1/\lambda} \sup\left(e^{X_1}, \ldots, e^{X_n}\right)$.

(d) $D_n = \sup(X_1, \ldots, X_n) - \ln(n)$ lorsque le paramètre λ vaut 1.

(66) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi que X. Montrer que si $\mathbf{P}([X > x]) = o(1/x)$ lorsque x tend vers l'infini, alors $\left(\frac{1}{n}\sup(X_1, \ldots, X_n)\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$.

(67) Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, on considère une variable aléatoire X centrée et de variance $\sigma^2 < +\infty$. Montrer que, pour tout $a > 0$, $a \leq \mathbf{E}\left((a - x)\mathbf{1}_{[X\leq a]}\right) \leq (\mathbf{P}([X \leq a]))^{1/2}\sqrt{\sigma^2 + a^2}$. En déduire que $\mathbf{P}([X > a]) \leq \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$.

(68) Un tiroir contient n paires de chaussures. On choisit au hasard $2r$ chaussures $(2r \leq n)$. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait parmi ces $2r$ chaussures aucune paire complète ? Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement k paires(s) complète(s) $(1 \leq k \leq r)$?

(69) Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Montrer que $Z = e^X$ est de densité f_Z est définie par $f_Z(x) = (2\pi)^{-1/2} x^{-1} e^{-(\ln x)^2/2}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$. La loi de Z s'appelle la loi log-normale.
Pour $a \in [-1, 1]$, soit $f_a(x) = f_Z(x)(1 + a\sin(2\pi\ln x))\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$. Montrer que si Z_a est de densité f_a, alors Z_a et Z ont les mêmes moments, et donc que les moments ne caractérisent pas une loi de probabilité.

(70) (★★) **HEC** Montrer que :

$$\forall x > 0, \quad \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

(71) (★★★) Soit X une variable aléatoire positive admettant un moment d'ordre deux sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et soit $\lambda \in]0, 1[$. Démontrer que $(1 - \lambda)\mathbf{E}(X) \leq \mathbf{E}\left(X\mathbf{1}_{[\lambda\mathbf{E}(X), +\infty[}\right)$, et en déduire, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que :

$$\mathbf{P}([X \geq \lambda\mathbf{E}(X)]) \geq (1 - \lambda)^2 \frac{(\mathbf{E}(X))^2}{\mathbf{E}(X^2)}$$

(72) (★★) Soit X une variable aléatoire absolument continue, de densité f continue sur $\mathbb{R}$ et de fonction de répartition F vérifiant :

$$\lim_{x\to+\infty} x(1 - F(x) - F(-x)) = 0$$

Montrer que si X admet une espérance, celle-ci est donnée par la formule :

$$\mathbf{E}(X) = \int_0^{+\infty} (1 - F(x) - F(-x))\, dx$$

(73) (★★) Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, de même loi exponentielle de densité $f_\theta(x) = \theta e^{-\theta x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$, $\theta > 0$. Déterminer les densités des lois de X^3, $|X-Y|$, $\inf\left(X, Y^3\right)$. Même question lorsque X et Y suivent la loi uniforme sur $[-1,1]$.

(74) (★★★) Soit X_i, $1 \leq i \leq n$, des variables aléatoires indépendantes, X_i étant de fonction de répartition F_i. Soit $m_n = \inf\limits_{1\leq i\leq n}(X_i)$ et $M_n = \sup\limits_{1\leq i\leq n}(X_i)$. Montrer que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{P}([x < m_n \leq M_n \leq y]) = \prod_{1\leq i\leq n}(F_i(y) - F_i(x))$$

(75) (★★) Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$, et soit ε une variable binaire telle que $\mathbf{P}([\varepsilon = 1]) = \mathbf{P}([\varepsilon = -1]) = 1/2$, indépendante de X. Démontrer que εX et $\varepsilon|X|$ ont même loi que X.

(76) (★★) Soit $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres appartenant à $[0,1]$; on lui associe une suite $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ dont les lois vérifient :

$$\mathbf{P}([X_n \leq t]) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ \alpha_n + (1-\alpha_n)t^n & \text{si} \quad t \in [0,1] \\ 1 & \text{si} \quad t > 1 \end{cases}$$

A quelles conditions sur $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ converge-t-elle en loi, en probabilité ?

(77) (★★) Montrer que si X_λ est loi $\mathcal{P}(\lambda\theta)$ alors la suite $((X_\lambda - \lambda\theta)/\lambda)$ converge en probabilité vers 0 lorsque λ tend vers ∞. En déduire que :

$$\lim_{\lambda\to\infty} e^{-\lambda\theta}\sum_{k=0}^{\lambda x}\frac{(\lambda\theta)^k}{k!} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \theta > x \\ 1 & \text{si} \quad \theta < x \end{cases}$$

(78) Soit X une variable aléatoire uniformément distribuée sur $[0,1]$. On pose $U = \inf(X, 1-X)$ et $V = \sup(X, 1-X)$. Déterminer la distribution de probabilité et l'espérance mathématique de la variable aléatoire V/U.

(79) (★★) Soit X_n une variable aléatoire discrète à valeurs dans $[\![1,n]\!]$ telle que, pour tout $1 \leq j \leq n$, $\mathbf{P}([X_n = j]) = n^{-1}$. Montrer que $(X_n/n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on déterminera la fonction de répartition.

(80) (★) Montrer pour $x > 0$ que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{n+x\sqrt{n}}\frac{u^{n-1}e^{-u}}{(n-1)!}du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right)du.$

(81) (★★) En considérant la variable aléatoire X qui prend les trois valeurs $m-a$, m et $m+a$ avec, respectivement, les probabilités $1/2a^2$, $1-1/a^2$ et $1/2a^2$, montrer que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ne peut être améliorée, sans hypothèses supplémentaires.

(82) (★★) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires binaires telle que pour tout $n \geq 1$, $\mathbf{P}([X_n = 1]) = \mathbf{P}([X_n = -1]) = 1/2$. On pose $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Montrer que la loi faible des grands nombres implique que $(S_n/n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers 0. Si F_n et F désignent, respectivement, les fonctions de répartition de S_n/n et de 0, a-t-on $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(0) = F(0)$?

(83) (★★) Calculer une valeur approchée de $\int_2^{2+\sqrt{2}} e^{-x^2+4x-2}dx$. On donne $\Phi(1) \simeq 0.8143$, $\Phi(2) \simeq 0.9773$, $\Phi\left(\sqrt{2}\right) \simeq 0.9212$, $\Phi\left(2\sqrt{2}\right) \simeq 0.9854$.

(84) (★★) **HEC** Soit $U_1, \ldots, U_n$ des variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre p.
Calculer $\mathbf{P}([U_1 \leq U_2 \leq \cdots \leq U_n])$.

(85) (★★) **HEC** Dans une urne il y a N boules $(N \geq 4)$ dont une seule est rouge.
On extrait des paquets de k boules $(k < N)$ que l'on remet dans l'urne jusqu'à obtention de la boule rouge.
On note Y_k la variable aléatoire qui prend pour valeurs le nombre de paquets tirés.

(a) Soit $k < \dfrac{N}{2}$. Quelle relation y a-t-il entre $\mathbf{E}(Y_k)$ et $\mathbf{E}(Y_{2k})$? Ce résultat était-il prévisible ?

(b) Déterminer la meilleure stratégie entre :
– (S_1) : tirer 3 paquets de 2 boules.
– (S_2) : tirer 2 paquets de 3 boules.
Ce résultat était-il prévisible ?

(86) (★★) **HEC** Soit N un entier supérieur ou égal à 2. Un joueur dispose de N pièces équilibrées. Il effectue des lancers successifs : pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, il lance i pièces au $i^{\text{ème}}$ lancer. Il s'arrête lorsqu'il a obtenu au moins un pile et si ce n'est pas le cas, il s'arrête au $N^{\text{ème}}$ lancer.
Soit X_N la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de lancers effectués.

(a) Déterminer la loi de X_N.

(b) Montrer que $\lim\limits_{N \to \infty} \mathbf{E}(X_N) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k(k-1)}{2}}$.

Deuxième partie
Correction

1 QSP 1

Avouez que l'on commence très simplement avec cette QSP car à ma grande stupéfaction la valeur de la somme vous était donnée. Par honnêteté intellectuelle je vous ai laissé la version originale du texte. Sortez vos violons ...

Nous savons depuis longtemps que

$$\sum_{\boldsymbol{k=0}}^{\boldsymbol{n}} \binom{n_1}{\boldsymbol{k}}\binom{n_2}{n-\boldsymbol{k}} = \binom{n_1+n_2}{n} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} n_1 \in \mathbb{N} \\ n_2 \in \mathbb{N} \\ n \leq n_1+n_2 \end{cases}$$

c'est la formule d'Alexandre Théophile **Vandermonde** (1735 – 1796). Il ne vous reste plus qu'à poser $n = n_1 = n_2$ ce qui donne :

$$\sum_{k=\mathbf{0}}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$$

et comme dit Yann, par **propriété de symétrie des coefficients binomiaux**, il vient :

$$\boxed{\sum_{\boldsymbol{k=0}}^{\boldsymbol{n}} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}}$$

C'est ce que l'on appelle le fameux corollaire de Vandermonde.

Maintenant si vous avez des scrupules, je vous propose la démonstration **combinatoire** classique : soit une urne U bicolore constituée de n boules blanches et n boules noires. Il existe $\binom{2n}{n}$ parties de n boules tirées de U. Parmi elles, celles qui sont composées de k boules blanches et de $n-k$ boules noires sont au nombre de $\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$. On retrouve toutes les $\displaystyle\binom{2n}{n}$ parties à n éléments en sommant sur k que l'on fait varier de 0 à n (c'est une histoire de partition $(A_k)_{0\leq k\leq n}$ où pour tout k de $\{0,1,\dots,n\}$ A_k est l'ensemble des parties exactement constituées de k boules blanches).

2 QSP 2

Voici une sublime QSP donnée à l'Ecole des managers killers décomplexés (HEC) en 2007. À consommer sans modération en cas de recyclage en 2014. À bon entendeur ...

1. Notons pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ $u_n(x)$ le terme général de la série dont l'expression dépend des valeurs de x.
   - Soit $n \geq 1$ et $x < 1/n$ alors par définition $\mathbf{1}_{[1/n,+\infty[}(x) = 0$ et $u_n(x) = 0$ donc la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n(x)$ converge.
   - Soit $n \geq 1$ et $x \geq 1/n$ alors par définition $\mathbf{1}_{[1/n,+\infty[}(x) = 1$ et $u_n(x) = \frac{1}{2^n}$ donc la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n(x)$ converge en tant série géométrique de raison $1/2$ strictement inférieure à 1 en valeur absolue.

   Conclusion :
   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{la série } \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n}\mathbf{1}_{[1/n,+\infty[}(x) \text{ est convergente}}$$

2. (a) Commençons par constater que pour tout entier naturel non nul n, $1/n \in]0,1]$ donc si $x \geq 1$ $\mathbf{1}_{[1/n,+\infty[}(x) = 1$. Voilà un premier résultat. Il ne reste plus qu'à voir ce qu'il se passe pour les valeurs de $x \in [1/4,1[$. Vu l'intervalle $[1/n,+\infty[$ définissant la fonction indicatrice, il conviendra de discuter selon que x appartienne tour à tour à $[1/4,1/3[$, $[1/3,1/2[$ et $[1/2,1[$. C'est parti ...

– Si $x \in [1/4, 1/3[$, alors $\mathbf{1}_{[1/n,+\infty[}(x) = 0$ pour $n \in \{1,2,3\}$ et $\mathbf{1}_{[1/n,+\infty[}(x) = 1$ si $n \geq 4$ ainsi :

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \mathbf{1}_{\left[\frac{1}{n},+\infty\right[}(x) \\ &= \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1}{2^4}\left(\frac{1}{1-1/2}\right) \\ &= 1/8 \end{aligned}$$

– Si $x \in [1/3, 1/2[$, alors $\mathbf{1}_{[1/n,+\infty[}(x) = 0$ pour $n \in \{1,2\}$ et $\mathbf{1}_{[1/n,+\infty[}(x) = 1$ si $n \geq 3$ ainsi :

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \mathbf{1}_{\left[\frac{1}{n},+\infty\right[}(x) \\ &= \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1}{2^3}\left(\frac{1}{1-1/2}\right) \\ &= 1/4 \end{aligned}$$

– Si $x \in [1/2, 1[$, alors $\mathbf{1}_{[1/n,+\infty[}(x) = 0$ pour $n \in \{1\}$ et $\mathbf{1}_{[1/n,+\infty[}(x) = 1$ si $n \geq 2$ ainsi :

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \mathbf{1}_{\left[\frac{1}{n},+\infty\right[}(x) \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{1-1/2}\right) \\ &= 1/2 \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 1/8 & \text{si} \quad x \in [1/4, 1/3[\\ 1/4 & \text{si} \quad x \in [1/3, 1/2[\\ 1/2 & \text{si} \quad x \in [1/2, 1[\\ 1 & \text{si} \quad x \in [1 + \infty 1[\end{cases}}$$

Je laisse au lecteur la joie de tracer la courbe représentative de F (fonction en escalier).

(b) Pour commencer signalons que si $x \leq 0$, $\mathbf{1}_{[1/n,+\infty[}(x) = 0$ pour tout entier naturel n non nul et

$$\sum_{n=1/x}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \mathbf{1}_{\left[\frac{1}{n},+\infty\right[}(x) = 0$$

Maintenant si $x > 0$ avec $x \geq 1/n$, $\mathbf{1}_{[1/n,+\infty[}(x) = 1$ et se pose la question de savoir si $1/x$ est un entier naturel ou non car cela influencera la valeur de la somme de la série en jeu. En effet $x \geq 1/n$ est équivalent à $n \geq 1/x$. Discutons ...

– Si $x > 0$ et $1/n \in \mathbb{N}^*$ alors :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1/x}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \mathbf{1}_{\left[\frac{1}{n},+\infty\right[}(x) &= \sum_{n=1/x}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{2}{2^{1/x}} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{1/x-1} \end{aligned}$$

– Si $x > 0$ et $1/n \notin \mathbb{N}^*$ alors :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1/x}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\mathbf{1}_{\left[\frac{1}{n},+\infty\right[}(x) &= \sum_{n=\lfloor 1/x\rfloor+1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{2}{2^{\lfloor 1/x\rfloor+1}} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\lfloor 1/x\rfloor}\end{aligned}$$

A ce niveau-là faisons un pose culturelle se basant sur la loi géométrique. Cette idée étant venue en examinant la "tête" des résultats des deux dernières sommes. En effet n'oubliez pas que la loi géométrique et la fonction d'antirépartition "font très bon ménage", comme je vous l'ai déjà signalé en cours, à savoir si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ alors $\mathbf{P}([X > k]) = q^k$. Lorsqu'on observe $(1/2)^{1/x-1}$ et $(1/2)^{\lfloor 1/x\rfloor}$ on voit apparaître q^k. Le dernier problème à résoudre est que le texte nous parle de fonction de répartition et non d'antirépartition ... C'est pour cela que vous devez avoir l'idée de construire une variable aléatoire X qui dépendra d'une autre, notons-là Y qui elle sera **géométrique**. Quelle est la fonction de transfert alors ? C'est la **fonction inverse**, en remarquant que pour $x > 0$, $[X \leq x] = [1/Y \leq x] = [Y \geq 1/x]$ et si $x \leq 0$, $[X \leq x] = 0$.
Moralité :

$$\boxed{F \text{ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire } X \text{ tel que } X = \frac{1}{Y} \text{ où } Y \hookrightarrow \mathcal{G}(1/2)}$$

3 QSP 3

Puisque les termes sont positifs, on peut effectuer l'étude dans l'ordre que l'on veut !

– Soit q fixé dans $\mathbb{N}^*$. La série simple $\displaystyle\sum_{p\geq 0} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$ converge car :

$$\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{1}{p^2}$$

ce qui nous ramène à une série de Riemann de paramètre $2 > 1$. On peut conclure par comparaison appliquée aux séries à termes positifs. Par télescopage :

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} \left(\frac{1}{p+q^2} - \frac{1}{p+q^2+1}\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{q^2} - \frac{1}{n+q^2+1}\right) \\ &= \frac{1}{q^2}\end{aligned}$$

– Enfin la série $\displaystyle\sum_{q\geq 1}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \sum_{q\geq 1}\frac{1}{q^2}$ converge aussi, pour les raisons qu'auparavant.

On peut donc affirmer selon le théorème de Fubini que la série double étudiée converge et de somme :

$$\boxed{\sum_{q=1}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{q^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

4 QSP 4

1. Cherchons K strictement positif telle que $\sum_{(a,b)\in\mathbb{Z}^2} p_{a,b} = 1$, la convergence de la série double étant assurée par le fait que la **suite double** $(p_{a,b})_{(a,b)\in\mathbb{Z}^2}$ définit bien une loi de probabilité sur $\left(\mathbb{Z}^2, \mathcal{P}\left(\mathbb{Z}^2\right)\right)$ et la famille événementielle $([A = a] \cap [B = b])_{(a,b)\in\mathbb{Z}^2}$ constitue un système complet d'événements. Comme nous travaillons dans $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ faisons attention. Par **Fubini** nous pouvons sommer dans n'importe quel ordre puisque la **série double** à termes positifs est convergente, nous avons :

$$\begin{aligned}
\sum_{(a,b)\in\mathbb{Z}^2} p_{a,b} &= \sum_{b\in\mathbb{Z}}\sum_{a\in\mathbb{Z}} p_{a,b} \\
&= K\sum_{b\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{a\in\mathbb{Z}_-^*} p_{a,b} + \sum_{a=0}^{+\infty} p_{a,b}\right) \\
&\quad \text{séparation} \\
&= K\sum_{b\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{a\in\mathbb{Z}_-^*} e^{-|a|-|b|} + \sum_{a=0}^{+\infty} e^{-|a|-|b|}\right) \\
&= K\sum_{b\in\mathbb{Z}} e^{-|b|}\left(\sum_{a\in\mathbb{Z}_-^*} e^{a} + \sum_{a=0}^{+\infty} e^{-a}\right) \\
&= K\sum_{b\in\mathbb{Z}} e^{-|b|}\left(\sum_{a'=1}^{+\infty} e^{-a'} + \sum_{a=0}^{+\infty} e^{-a}\right) \\
&\quad \text{en posant } a' = -a \\
&= K\sum_{b\in\mathbb{Z}}\left(\frac{e^{-1}}{1-e^{-1}} + \frac{1}{1-e^{-1}}\right) e^{-|b|} \\
&= K\sum_{b\in\mathbb{Z}} \frac{e^{-1}+1}{1-e^{-1}} e^{-|b|} \\
&= K\frac{e^{-1}+1}{1-e^{-1}}\left(\sum_{b\in\mathbb{Z}_-^*} e^{-|b|} + \sum_{b=0}^{+\infty} e^{-|b|}\right) \\
&= K\frac{e^{-1}+1}{1-e^{-1}}\left(\sum_{b'=1}^{+\infty} e^{-b'} + \sum_{a=0}^{+\infty} e^{-b}\right) \\
&\quad \text{en posant } b' = -a \\
&= K\frac{e^{-1}+1}{1-e^{-1}}\left(\frac{e^{-1}}{1-e^{-1}} + \frac{1}{1-e^{-1}}\right) \\
&= K\left(\frac{e^{-1}+1}{1-e^{-1}}\right)^2 \\
&= K\left(\frac{e+1}{1-e}\right)^2
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{K = \left(\frac{e-1}{e+1}\right)^2}$$

2. Le discriminant du polynôme $(X - A)(X - B)$ vaut $\Delta = (A - B)^2$. Il nous faut calculer en cas d'existence l'espérance de $(A - B)^2$ en cas d'existence. Selon le bon vieux théorème de transfert $\mathbf{E}(\Delta)$ existe si, et seulement si la **série double** à termes positifs $\sum_{(a,b)} (a - b)^2 p_{a,b}$ est convergente soit si, et seulement si la série double $\sum_{(a,b)} (a - b)^2 e^{-|a|-|b|}$ est convergente avec :

$$\begin{aligned}
(a-b)^2 e^{-|a|-|b|} &= \left(a^2 - 2ab + b^2\right) e^{-|a|-|b|} \\
&= a^2 e^{-|a|-|b|} - 2abe^{-|a|-|b|} + b^2 e^{-|a|-|b|}
\end{aligned}$$

– Etude de la convergence de la **série double** $\sum\limits_{(a,b)} a^2 e^{-|a|-|b|}$.

  – Pour tout b de $\mathbb{Z}$, la **série simple** $\sum\limits_{a} a^2 e^{-|a|-|b|}$ converge si, et seulement si $\sum\limits_{a\geq 0} a^2 e^{-|a|-|b|}$ et $\sum\limits_{a<0} a^2 e^{-|a|-|b|}$ convergent et comme :

$$(-a)^2\, e^{-|-a|-|b|} = a^2 e^{-|a|-|b|}$$

  les séries sont de même nature avec, en cas de convergence,

$$\sum_{a\in\mathbb{Z}} a^2 e^{-|a|-|b|} = 2\sum_{a=0}^{+\infty} a^2 e^{-a-|b|}$$

  La convergence ne pose aucun problème puisque le terme général s'écrit comme combinaison linéaire de termes généraux de séries dérivées (d'ordre un et deux) convergentes puisque :

$$a^2 e^{-a-|b|} = a\,(a-1)\, e^{-a-|b|} + a e^{-a-|b|}$$

  Comme il est de notoriété publique que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 e^{-n} = \frac{e\,(e+1)}{(e-1)^3} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n e^{-n} = \frac{e}{(e-1)^2}$$

  ainsi :

$$\sum_{a\in\mathbb{Z}} a^2 e^{-|a|-|b|} = 2\sum_{a=1}^{+\infty} a^2 e^{-a-|b|} = \frac{2e\,(e+1)}{(e-1)^3} e^{-|b|}$$

  – Enfin la **série simple** converge $\sum\limits_{b} 2e^{-|b|}\dfrac{e\,(1+e)}{(e-1)^3}$ si, et seulement si $\sum\limits_{b\geq 0} 2e^{-b}\dfrac{e\,(1+e)}{(e-1)^3}$ en tant que série proportionnelle à la série géométrique de raison e^{-1} strictement inférieure à un en valeur absolue.

  – En conclusion la **série double** $\sum\limits_{(a,b)} a^2 e^{-|a|-|b|}$ converge selon le **théorème de Fubini** de somme égale à :

$$\begin{aligned}
\sum_{(a,b)\in\mathbb{Z}^2} a^2 e^{-|a|-|b|} &= \frac{2e\,(e+1)}{(e-1)^3}\left(\sum_{b=1}^{+\infty} 2e^{-b} + 1\right) \\
&= 4\frac{e\,(1+e)}{(e-1)^3}\frac{e^{-1}}{1-e^{-1}} + \frac{2e\,(e+1)}{(e-1)^3} \\
&= \frac{2e\,(e+1)^2}{(e-1)^4}
\end{aligned}$$

– Etude de la convergence de la **série double** $\sum\limits_{(a,b)} b^2 e^{-|a|-|b|}$.

  Une étude similaire à la précédente montre que la série double $\sum\limits_{(a,b)} b^2 e^{-|a|-|b|}$ converge de somme égale à :

$$\sum_{(a,b)\in\mathbb{Z}^2} b^2 e^{-|a|-|b|} = \frac{2e\,(e+1)^2}{(e-1)^4}$$

– Etude de la convergence absolue de la série double $\sum\limits_{(a,b)} ab e^{-|a|-|b|}$.

  – Pour tout b de $\mathbb{Z}$, la **série simple** $\sum\limits_{a} |a|\,|b|\, e^{-|a|-|b|}$ en série proportionnelle à une série dérivée de série géométrique de raison e^{-1} avec $\left|e^{-1}\right| < 1$ et de somme :

$$\begin{aligned}
2\sum_{a=1}^{+\infty} a\,|b|\, e^{-a-|b|} &= 2\,|b|\, e^{-|b|}\sum_{a=1}^{+\infty} a e^{-a} \\
&= 2\,|b|\, e^{-|b|}\frac{e^{-1}}{(1-e^{-1})^2} \\
&= 2\,|b|\, e^{-|b|}\frac{e}{(e-1)^2}
\end{aligned}$$

– Enfin pour les mêmes raisons la **série simple** $\sum_b 2|b|\, e^{-|b|} \dfrac{e^{-1}}{(1-e^{-1})^2}$. converge.

– Selon le **théorème de Fubini** la série double $\sum_{(a,b)} abe^{-|a|-|b|}$ converge absolument donc converge de somme :

$$\begin{aligned}
\sum_{(a,b)\in\mathbb{Z}^2} abe^{-|a|-|b|} &= \sum_{b\in\mathbb{Z}} \sum_{a\in\mathbb{Z}} abe^{-|a|-|b|} \\
&= \sum_{b\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{a\in\mathbb{Z}^*} abe^{-|a|-|b|} \right) \\
&= \sum_{b\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{a=1}^{+\infty} abe^{-|a|-|b|} - \sum_{a=1}^{+\infty} abe^{-|-a|-|b|} \right) \\
&= \sum_{b\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{a=1}^{+\infty} abe^{-|a|-|b|} - \sum_{a=1}^{+\infty} abe^{-|a|-|b|} \right) \\
&= \sum_{b\in\mathbb{Z}} 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

En conclusion finale, la **série double** $\sum_{(a,b)} (a-b)^2 e^{-|a|-|b|}$ converge en tant que combinaison linéaire de termes généraux de séries doubles convergentes de somme :

$$\sum_{(a,b)} (a-b)^2 e^{-|a|-|b|} = \sum_{(a,b)\in\mathbb{Z}^2} a^2 e^{-|a|-|b|} - 2 \sum_{(a,b)\in\mathbb{Z}^2} abe^{-|a|-|b|} + \sum_{(a,b)\in\mathbb{Z}^2} b^2 e^{-|a|-|b|} = \frac{4e(e+1)^2}{(e-1)^4}$$

L'espérance de Δ existe donc et vaut :

$$\boxed{\mathbf{E}(\Delta) = \left(\frac{e-1}{e+1}\right)^2 \times \frac{4e(e+1)^2}{(e-1)^4} = \frac{4e}{(e-1)^2}}$$

5 QSP 5

Tout d'abord la variable Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et :

$$\boxed{Y(\Omega) = \mathbb{N}^*}$$

Selon la **formule des probabilités totales** associée au système complet d'événement

$$\{[X \in 2\mathbb{N}+1], [X \in 2\mathbb{N}^*]\}$$

nous avons pour chaque entier naturel k :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([Y=2k+1]) &= \mathbf{P}([Y=2k+1] \cap [X \in 2\mathbb{N}+1]) + \mathbf{P}([Y=2k+1] \cap [X \in 2\mathbb{N}]) \\
&= \mathbf{P}([X=2k+1] \cap [X \in 2\mathbb{N}+1]) + \mathbf{P}\left(\left[\frac{X}{2} = 2k+1\right] \cap [X \in 2\mathbb{N}]\right) \\
&= \mathbf{P}([X=2k+1]) + \mathbf{P}([X=4k+2] \cap [X \in 2\mathbb{N}]) \\
&= \mathbf{P}([X=2k+1]) + \mathbf{P}([X=4k+2]) \\
&= q^{2k}p + q^{4k+1}p
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}([Y=2k+1]) = p\left(q^{2k} + q^{4k+1}\right)}$$

et pour k non nul :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([Y=2k]) &= \mathbf{P}([Y=2k] \cap [X \in 2\mathbb{N}+1]) + \mathbf{P}([Y=2k] \cap [X \in 2\mathbb{N}]) \\
&= \mathbf{P}(\underbrace{[X=2k] \cap [X \in 2\mathbb{N}+1]}_{\emptyset}) + \mathbf{P}\left(\left[\tfrac{X}{2} = 2k\right] \cap [X \in 2\mathbb{N}]\right) \\
&= \mathbf{P}([X=4k] \cap [X \in 2\mathbb{N}]) \\
&= \mathbf{P}([X=4k])
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}([Y = 2k]) = q^{4k-1}p}$$

Je vous laisse cette fois-ci vérifier que la somme des probabilités est égale à 1.

6 QSP 6

1. La variable X^2 est positive ou nulle donc l'égalité $\mathbf{E}(X^2) = 0$ si, et seulement si, X^2 est nulle presque surement ou encore si, et seulement si, X est nulle presque surement. En effet rappelez-vous que :

$$\left(\mathbf{E}(X^2) = 0\right) \Longrightarrow (\mathbf{V}(X) = 0) \quad \text{et} \quad (\mathbf{V}(X) = 0) \Longleftrightarrow (X = c \text{ p.s.})$$

2. La fonction $t \mapsto \mathbf{E}\left((X + tY)^2\right) = t^2\mathbf{E}(Y^2) + 2t\mathbf{E}(XY) + \mathbf{E}(X^2)$ qui représente un trinôme du second degré toujours positif ou nul. Par conséquent son discriminant réduit :

$$(\mathbf{E}(XY))^2 - \mathbf{E}(X^2)\mathbf{E}(Y^2)$$

est négatif, autrement dit :

$$\boxed{(\mathbf{E}(XY))^2 \leq \mathbf{E}(X^2)\mathbf{E}(Y^2)}$$

3. Comme X est une variable aléatoire positive, nous avons :

$$1 = \mathbf{1}_{[a\mathbf{E}(X),+\infty[}(X) + \mathbf{1}_{[0,a\mathbf{E}(X)[}(X)$$

et en multipliant membre à membre par X positive, il s'ensuit :

$$X = X\mathbf{1}_{[a\mathbf{E}(X),+\infty[}(X) + X\mathbf{1}_{[0,a\mathbf{E}(X)[}(X)$$

Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}\left(X\mathbf{1}_{[a\mathbf{E}(X),+\infty[}(X)\right) + \mathbf{E}\left(X\mathbf{1}_{[0,a\mathbf{E}(X)[}(X)\right)$$

Or $\mathbf{E}\left(X\mathbf{1}_{[0,a\mathbf{E}(X)[}(X)\right) \leq a\mathbf{E}(X)$ donc :

$$\mathbf{E}\left(X\mathbf{1}_{[0,a\mathbf{E}(X)[}(X)\right) \geq \mathbf{E}(X) - a\mathbf{E}(X)$$

d'où le résultat :

$$\boxed{(1-a)\mathbf{E}(X) \leq \mathbf{E}\left(X\mathbf{1}_{[a\mathbf{E}(X),+\infty[}(X)\right)}$$

4. En utilisant les deux questions précédentes on a :

$$(1-a)^2(\mathbf{E}(X))^2 \leq \left(\mathbf{E}\left(X\mathbf{1}_{[0,a\mathbf{E}(X)[}(X)\right)\right)^2 \leq \mathbf{E}(X^2)\,\mathbf{E}\left(\left(\mathbf{1}_{[0,a\mathbf{E}(X)[}(X)\right)^2\right)$$

soit encore par transitivité de la relation d'ordre $\leq$ sans oublier que :

$$\mathbf{E}\left(\left(\mathbf{1}_{[0,a\mathbf{E}(X)[}(X)\right)^2\right) = \mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{[0,a\mathbf{E}(X)[}(X)\right)$$

nous obtenons donc :

$$(1-a)^2(\mathbf{E}(X))^2 \leq \mathbf{E}(X^2)\,\mathbf{E}\left(\left(\mathbf{1}_{[0,a\mathbf{E}(X)[}(X)\right)\right)$$

soit encore, puisque $\mathbf{E}(X^2) > 0$:

$$\boxed{\mathbf{P}([X \geq a\mathbf{E}(X)]) \geq (1-a)^2 \frac{(\mathbf{E}(X))^2}{\mathbf{E}(X^2)}}$$

7 QSP 7

1. Tout d'abord la variable X prend ses valeurs dans $\{1,\dots,n+1\}$ et selon la **formule des probabilités totales** associée au système complet d'événements $([Y=j])_{j\in\{1,\dots,n+1\}}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([X=i]) &= \sum_{j=1}^{n+1}\mathbf{P}([X=i]\cap[Y=j])\\
&= \sum_{j=1}^{n+1}\frac{\binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}}{2^{2n}}\\
&= \frac{\binom{n}{i-1}}{2^{2n}}\sum_{j=1}^{n+1}\frac{\binom{n}{j-1}}{2^{2n}}\\
&= \frac{\binom{n}{i-1}}{2^{2n}}2^n
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall i\in\{1,\dots,n+1\},\quad \mathbf{P}([X=i])=\frac{\binom{n}{i-1}}{2^n}}$$

Autrement dit :

$$\boxed{X-1\hookrightarrow\mathcal{B}(n,1/2)}$$

La variable $X-1$ admettant une espérance et une variance il est de même pour X obtenue par translation affine à partir de $X-1$ avec par propriétés élémentaires :

$$\boxed{\mathbf{E}(X)=\frac{n}{2}+1\quad\text{et}\quad\mathbf{V}(X)=\frac{n}{4}}$$

2. Comme $\forall i\in\{1,\dots,n+1\}$, $\mathbf{P}([X=i])\neq 0$ la probabilité conditionnelle est bien définie avec par définition pour tout couple $(i,j)\in\{1,\dots,n+1\}^2$:

$$\begin{aligned}
m_{i,j} &= \mathbf{P}_{[X=j]}([Y=i])\\
&= \frac{\mathbf{P}([X=j]\cap[Y=i])}{\mathbf{P}([X=j])}\\
&= \frac{\binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}}{2^{2n}}\frac{2^n}{\binom{n}{j-1}}\\
&= \frac{\binom{n}{i-1}}{2^n}
\end{aligned}$$

Par définition du produit matriciel si l'on note $M^2=(n_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\dots,n+1\}^2}$ avec pour chaque couple (i,j) de $\{1,\dots,n+1\}^2$,

$$\begin{aligned}
n_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n+1}m_{i,k}m_{k,j}\\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{\binom{n}{i-1}}{2^n}\frac{\binom{n}{k-1}}{2^n}\\
&= \frac{\binom{n}{i-1}}{2^n}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\binom{n}{k-1}}{2^n}\\
&= \frac{\binom{n}{i-1}}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\\
&= \frac{\binom{n}{i-1}}{2^n}\\
&= m_{i,j}
\end{aligned}$$

Moralité :

$$M^2 = M$$

Dès lors $P = X^2 - X$ est un **polynôme annulateur de M** ainsi $\operatorname{Spec}(M) \subset \{0,1\}$.
Supposons 0 ne soit pas valeur propre de M, ainsi M est inversible et l'égalité $M^2 = M$ entraîne que $M^2M^{-1} = MM^{-1}$ soit encore que $M = I$ ce qui est faux ! Moralité 0 est valeur propre de M. De même si 1 n'est pas valeur propre de M alors $M - I_3$ est inversible et l'égalité $M^2 = M$ qui s'écrit encore $M(M - I_3) = 0$ entraîne que $M = 0$ ce qui est encore faux et 1 est valeur propre de M. En conclusion :

$$\boxed{\operatorname{Spec}(M) = \{0,1\}}$$

8 QSP 8

La série double à termes positifs $\sum\limits_{i\geq 0, j\geq 0} \dfrac{i+j}{i!j!2^{i+j}}$ converge si les séries $\sum\limits_{i\geq 0, j\geq 0} \dfrac{i}{i!j!2^{i+j}}$ et $\sum\limits_{i\geq 0, j\geq 0} \dfrac{j}{i!j!2^{i+j}}$ converg**ent**. Comme i et j jouent clairement des **rôles symétriques**, nous n'étudierons la convergence que de la première série.
Tout d'abord signalons que $\frac{i}{i!j!2^{i+j}}$ est nul pour $i = 0$ par conséquent nous prendrons i dans $\mathbb{N}^*$.

- Pour tout entier j de $\mathbb{N}$, la **série simple** de terme général $\frac{i}{i!j!2^{i+j}} = \frac{1}{j!2^{j+1}}\frac{1}{(i-1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$ converge par proportionnalité de son terme général avec celui d'une **série exponentielle** de paramètre $1/2 \in \mathbb{R}$ et de somme :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{j!2^{j+1}}\frac{1}{(i-1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} = \frac{1}{j!2^{j+1}}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{i!}\left(\frac{1}{2}\right)^{i} = \frac{e^{1/2}}{j!2^{j+1}}$$

- La **série simple** de terme général $\frac{e^{1/2}}{j!2^{j+1}}$ converge aussi, puisque là encore il y a une proportionnalité avec le terme général de la même **série exponentielle** de paramètre $1/2 \in \mathbb{R}$ de somme égale à $e/2$.
  Selon le **théorème de Fubini**, la série double $\sum\limits_{i\geq 0, j\geq 0} \frac{i}{i!j!2^{i+j}}$ converge et par la même occasion, vous savez le problème de symétrie ..., la série double $\sum\limits_{i\geq 0, j\geq 0} \frac{i+j}{i!j!2^{i+j}}$ converge aussi de somme :

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \frac{i+j}{i!j!2^{i+j}} = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \frac{i}{i!j!2^{i+j}} + \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \frac{j}{i!j!2^{i+j}} = 2 \times \frac{e}{2}$$

  Finalement :

$$\boxed{\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \frac{i+j}{i!j!2^{i+j}} = e}$$

9 QSP 9

L'événement "M est inversible" est réalisé si et seulement si l'événement "$\{\omega \in \Omega \mid \det M(\omega) \neq 0\}$" est réalisé soit si, et seulement si l'événement "$\left\{\omega \in \Omega \mid X^2(\omega) \neq Y^2(\omega)\right\}$" l'est. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\text{“}M \text{ est inversible”}) &= 1 - \mathbf{P}\left(\left[X^2 = Y^2\right]\right) \\
&= 1 - \mathbf{P}([|X| = |Y|]) \\
&\quad \text{car } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est bijective sur } \mathbb{R}_+ \\
&= 1 - \mathbf{P}([X = Y]) \\
&\quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont deux variables positives} \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}([X = Y] \cap [X = k]) \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}([X = k] \cap [Y = k]) \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}([X = k])\,\mathbf{P}([Y = k])
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{par indépendance de } X \text{ et } Y \\
= \ & 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\mathbf{P}\left([X=k]\right)\right)^2 \\
& \text{car } X \text{ et } Y \text{ suivent la même loi} \\
= \ & 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \left((1-p)^{k-1} p\right)^2 \\
= \ & 1 - p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \left((1-p)^2\right)^{k-1} \\
= \ & 1 - \frac{p^2}{1-(1-p)^2}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{P}\left(\text{“}M \text{ est inversible”}\right) = 2\left(\frac{p-1}{p-2}\right)}$$

10 QSP 10

1. D'après le cours $X+Y \hookrightarrow \mathcal{P}(2)$ par **stabilité de la loi de Poisson pour la somme de variables indépendantes**, ainsi pour tout entier naturel s, $\mathbf{P}([X+Y=s])$ et la loi conditionnelle de X sachant que $[X+Y=s]$ est bien définie.
Sachant que $X+Y=s$, la variable X prend ses valeurs dans l'ensemble $[\![0,s]\!]$.
Soit $i \in [\![0,s]\!]$, par définition de la probabilité conditionnelle,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{[X+Y=s]}([X=i]) &= \frac{\mathbf{P}([X=i]\cap[X+Y=s])}{\mathbf{P}([X+Y=s])} \\
&= \frac{\mathbf{P}([X=i]\cap[Y=s-i])}{\mathbf{P}([X+Y=s])} \\
&= \frac{\mathbf{P}([X=i])\,\mathbf{P}([Y=s-i])}{\mathbf{P}([X+Y=s])} \\
& \quad \text{par indépendance des deux variables en jeu} \\
&= \frac{\frac{e^{-1}}{i!}\frac{e^{-1}}{(s-i)!}}{\frac{e^{-2}2^s}{s!}} \\
&= \frac{\frac{1}{i!}\frac{1}{(s-i)!}}{\frac{2^s}{s!}} \\
&= \binom{s}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^s
\end{aligned}$$

En conclusion,

$$\boxed{\text{La loi de } X \text{ conditionnée par } [X+Y=s] \text{ est la loi binomiale } \mathcal{B}(s,1/2)}$$

2. Commençons par dire que pour chaque entier naturel s, l'espérance conditionnelle de X sachant que $[X+Y=s]$ existe, égale à $s/2$. Ainsi pour confirmer que X admet une espérance il ne nous reste plus qu'à démontrer que la série $\sum_{s\geq 0} \mathbf{E}(X \mid [X+Y=s])\,\mathbf{P}([X+Y=s])$ soit que la série à termes positifs $\sum_{s\geq 0} \frac{s}{2}\frac{e^{-2}2^s}{s!}$ converge. Or $\forall s \geq 1$, $\frac{s}{2}\frac{e^{-2}2^s}{s!} = \frac{e^{-2}2^{s-1}}{(s-1!)}$ et nous devons admettre que nous sommes en présence d'un terme général proportionnel à celui d'une série exponentielle de paramètre réel 2. Ainsi X admet une espérance dont la valeur est donnée par la formule de l'espérance totale, et égale à :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X) &= \sum_{s=0}^{+\infty} \mathbf{E}(X \mid [X+Y=s])\,\mathbf{P}([X+Y=s]) \\
&= \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{s}{2}\frac{e^{-2}2^s}{s!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{e^{-2}2^{s-1}}{(s-1!)} \\ &= e^{-2}\sum_{s=1}^{+\infty} \frac{2^{s-1}}{(s-1!)} \\ &= e^{-2}e^{2} \end{aligned}$$

Et nous retrouvons bien que :

$$\boxed{\mathbf{E}(X) = 1}$$

11 QSP 11

Tout d'abord d'après le cours Z est une variable aléatoire en tant que combinaison linéaire de $|X|$ et Y qui sont des variables aléatoires. Maintenant le texte nous parle de densité ce que nous allons prouver en étudiant les classes de la fonction de répartition de Z. Pour cela utilisons la **formule des probabilités totales** associée au système complet d'événements $\{[Y=0],[Y=1]\}$.

Soit x un réel :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([Z \le x]) &= \mathbf{P}([Z \le x] \cap [Y=0]) + \mathbf{P}([Z \le x] \cap [Y=1]) \\ &= \mathbf{P}([|X|(aY + b(1-Y)) \le x] \cap [Y=0]) + \mathbf{P}([|X|(aY + b(1-Y)) \le x] \cap [Y=1]) \\ &= \mathbf{P}([b|X| \le x] \cap [Y=0]) + \mathbf{P}([a|X| \le x] \cap [Y=1]) \\ &= \mathbf{P}([b|X| \le x])\,\mathbf{P}([Y=0]) + \mathbf{P}([a|X| \le x])\,\mathbf{P}([Y=1]) \\ &\quad \text{par indépendance de } X \text{ et } Y \\ &= (1-p)\,\mathbf{P}([b|X| \le x]) + p\mathbf{P}([a|X| \le x]) \end{aligned}$$

A ce niveau établissons une **discussion** selon le signe de a et de b.

– **Premier cas : a et b strictement positifs.** Dans ce cas Z prend presque surement ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall x < 0, \quad \mathbf{P}([Z \le x]) = 0$$

Soit $x \ge 0$:

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= \mathbf{P}([Z \le x]) \\ &= (1-p)\,\mathbf{P}\left(\left[|X| \le \frac{x}{b}\right]\right) + p\mathbf{P}\left(\left[|X| \le \frac{x}{a}\right]\right) \\ &= (1-p)\,\mathbf{P}\left(\left[-\frac{x}{b} \le X \le \frac{x}{b}\right]\right) + p\mathbf{P}\left(\left[-\frac{x}{a} \le X \le \frac{x}{a}\right]\right) \\ &= (1-p)\left(2F_X\left(\frac{x}{b}\right) - 1\right) + p\left(2F_X\left(\frac{x}{a}\right) - 1\right) \\ &\quad \text{car la distribution de } X \text{ est bilatérale} \end{aligned}$$

Bilan :

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ (1-p)\left(2F_X\left(\frac{x}{b}\right) - 1\right) + p\left(2F_X\left(\frac{x}{a}\right) - 1\right) & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$$

Faisons une halte pour vérifier "les classes" de F_Z. Vous savez **par définition** que F_X est continue partout avec $F_X(0) = 1/2$ puisque . Ainsi :

– F_Z est continue en 0 car $F_X(0) = 1/2$[1] et $F_Z(0) = 1 - p + p = 1 = \lim_{x \to 0^-} F_Z(x)$.

– F_Z est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_-^*$ par coïncidence de F_Z avec la fonction nulle sur cet intervalle.

– F_Z est continue sur $\mathbb{R}_+$ par somme et composition de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$.

– F_Z est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ puisque $x \mapsto x/a$ et $x \mapsto x/b$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et F_X est de classe sur $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

En conclusion F_Z est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ presque partout et nous permet d'affirmer que

[1] Cela vient de la relation $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(-x) = 1 - F_X(x)$ en $x = 0$.

Z est une variable à densité. Une densité est obtenue par dérivation de F_Z là où elle est dérivable c'est-à-dire là f_X est continue. Nous noterons $E = \{x_k, k \in K\}$ l'ensemble fini des points de discontinuité de f_X sur $\mathbb{R}$:

$$f_Z(x) = \begin{cases} \dfrac{2(1-p)}{b} f_X\left(\dfrac{x}{b}\right) + \dfrac{2p}{a} f_X\left(\dfrac{x}{a}\right) & \text{si } x \in \mathbb{R}_+ - \left(\left\{x \mid \frac{x}{a} = x_k \text{ et } \frac{x}{b} = x_k,\ k \in K\right\} \cap \mathbb{R}_+\right) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

– **Deuxième cas : $a > 0$ et $b < 0$**. Dans ce cas Z prend presque surement ses valeurs dans $\mathbb{R}$ et :
  – Pour $x < 0$:

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= \mathbf{P}([Z \le x]) \\ &= (1-p)\,\mathbf{P}\left(\left[|X| \ge \frac{x}{b}\right]\right) + p\underbrace{\mathbf{P}\left(\left[|X| \le \frac{x}{a}\right]\right)}_{=0} \\ &= (1-p)\left(1 - \mathbf{P}\left(\left[-\frac{x}{b} \le X \le \frac{x}{b}\right]\right)\right) \\ &= (1-p)\left(1 - \left(2F_X\left(\frac{x}{b}\right) - 1\right)\right) \\ &= -(1-p)\,2F_X\left(\frac{x}{b}\right) \end{aligned}$$

Soit $x \ge 0$:

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= \mathbf{P}([Z \le x]) \\ &= (1-p)\underbrace{\mathbf{P}\left(\left[|X| \ge \frac{x}{b}\right]\right)}_{=1} + p\mathbf{P}\left(\left[|X| \le \frac{x}{a}\right]\right) \\ &= (1-p) + p\mathbf{P}\left(\left[-\frac{x}{a} \le X \le \frac{x}{a}\right]\right) \\ &= (1-p) + p\left(2F_X\left(\frac{x}{a}\right) - 1\right) \end{aligned}$$

Bilan :

$$F_Z(x) = \begin{cases} -(1-p)\,2F_X\left(\dfrac{x}{b}\right) & \text{si} \quad x < 0 \\ (1-p) + p\left(2F_X\left(\dfrac{x}{a}\right) - 1\right) & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$$

Je vous laisse vérifier les "les classes" de F_Z pour affirmer que lorsque $a > 0$ et $b < 0$ la variable Z est encore à densité avec :

$$f_Z(x) = \begin{cases} \dfrac{-2(1-p)}{b} f_X\left(\dfrac{x}{b}\right) & \text{si } x \in \mathbb{R}_-^* - \left(\left\{x \mid \frac{x}{a} = x_k \text{ et } \frac{x}{b} = x_k,\ k \in K\right\} \cap \mathbb{R}_-^*\right) \\ 2pf_X\left(\dfrac{x}{a}\right) & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^* - \left(\left\{x \mid \frac{x}{a} = x_k \text{ et } \frac{x}{b} = x_k,\ k \in K\right\} \cap \mathbb{R}_+^*\right) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

– **Les troisième et quatrième cas** respectivement **$a < 0$ et $b < 0$** et **$a < 0$ et $b > 0$** sont certes à étudier mais il est inutile de tout refaire, il vous suffit de dire que $-Z$ reste une variable à densité car obtenue par transformation affine à partir de Z et le cours nous informe que l'on passe d'une densité de Z à une de $-Z$ par la relation $f_{-Z}(x) = \frac{1}{|-1|} f_Z(-x)$ presque partout.

En conclusion Z est une variable absolument continue de densité :

$$\boxed{f_Z(x) = \begin{cases} \left(\frac{2(1-p)}{b} f_X\left(\frac{x}{b}\right) + \frac{2p}{a} f_X\left(\frac{x}{a}\right)\right) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+ - \left(\left\{x \mid \frac{x}{a} = x_k \text{ et } \frac{x}{b} = x_k,\ k \in K\right\} \cap \mathbb{R}_+\right)}(x) & \text{si} \quad (a,b) \in \mathbb{R}_+^* \\ \begin{cases} \frac{-2(1-p)}{b} f_X\left(\frac{x}{b}\right) & \text{si } x \in \mathbb{R}_-^* - \left(\left\{x \mid \frac{x}{b} = x_k,\ k \in K\right\} \cap \mathbb{R}_-^*\right) \\ 2pf_X\left(\frac{x}{a}\right) & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^* - \left(\left\{x \mid \frac{x}{a} = x_k,\ k \in K\right\} \cap \mathbb{R}_+^*\right) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} & \text{si} \quad a > 0 \text{ et } b < 0 \\ \left(\frac{2(1-p)}{b} f_X\left(-\frac{x}{b}\right) + \frac{2p}{a} f_X\left(-\frac{x}{a}\right)\right) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_- - \left(\left\{x \mid \frac{x}{a} = x_k \text{ et } \frac{x}{b} = x_k,\ k \in K\right\} \cap \mathbb{R}_-\right)}(x) & \text{si} \quad (a,b) \in \mathbb{R}_-^* \\ \begin{cases} \frac{-2(1-p)}{b} f_X\left(-\frac{x}{b}\right) & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^* - \left(\left\{x \mid -\frac{x}{b} = x_k,\ k \in K\right\} \cap \mathbb{R}_+^*\right) \\ 2pf_X\left(-\frac{x}{a}\right) & \text{si } x \in \mathbb{R}_-^* - \left(\left\{x \mid -\frac{x}{a} = x_k \text{ et } \frac{x}{b} = x_k,\ k \in K\right\} \cap \mathbb{R}_-^*\right) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} & \text{si} \quad a < 0 \text{ et } b > 0 \end{cases}}$$

12 QSP 12

1. Commençons par signaler que si $\lambda = 0$ ou $\mu = 0$, on voit que soit $Z = 0$ soit Z suit une loi exponentielle soit $-Z$ suit une loi exponentielle. En effet :

$$f_{\mu}(x) = \begin{cases} \begin{cases} \dfrac{b}{\mu}\exp\left(-\dfrac{bx}{\mu}\right) & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} & \text{si} \quad \mu > 0 \\ \begin{cases} -\dfrac{b}{\mu}\exp\left(-\dfrac{bx}{\mu}\right) & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} & \text{si} \quad \mu < 0 \end{cases}$$

Que cette question soit d'ailleurs pour moi l'occasion de vous donner la proposition suivante :

$$\boxed{\text{Soit } \lambda \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } c \in \mathbb{R}^* \text{ alors : } \begin{cases} \text{si } c > 0, \quad (X \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)) \Longleftrightarrow \left(\dfrac{X}{c} \hookrightarrow \varepsilon(\lambda c)\right) \\ \text{si } c < 0, \quad (X \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)) \Longleftrightarrow \left(-\dfrac{X}{c} \hookrightarrow \varepsilon(-\lambda c)\right) \end{cases}}$$

Sinon posons $X' = |\lambda| X$ et $Y' = |\mu| Y$, $r = \dfrac{a}{|\lambda|}$ et $s = \dfrac{b}{|\mu|}$ alors $X' \hookrightarrow \varepsilon(r)$ et $Y' \hookrightarrow \varepsilon(s)$.

– Supposons que $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ alors si la fonction $f_{X'} * f_{Y'}$ définie par la relation

$$(f_{X'} * f_{Y'})(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} re^{-rt}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)\, se^{-s(x-t)}\mathbf{1}_{]-\infty,x]}(t)\, dt = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\, rse^{-sx}\int_0^x e^{-(r-s)t}dt$$

est définie et continue pp et puisque X' et Y' sont indépendantes, on en déduit que $Z = X' + Y'$ est une variable à densité dont une densité est donnée par $f_{X'} * f_{Y'}$.

– Si $r \neq s$, on obtient :

$$(f_{X'} * f_{Y'})(x) = \frac{rs}{s-r}e^{-sx}\left(e^{-(r-s)x} - 1\right)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x) = \left(\frac{e^{-rx} - e^{-sx}}{s-r}\right) rs\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$$

$f_{X'} * f_{Y'}$ est définie et continue pp (avec un défaut éventuel de continuité en 0) et puisque X' et Y' sont indépendantes, on en déduit que $Z = X' + Y'$ est une variable à densité dont une densité est donnée par $f_{X'} * f_{Y'}$. Elle est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ en 0 vaut 0, croît jusqu'au maximum en $x = \dfrac{\ln r - \ln s}{s - r}$ et décroît ensuite en tendant vers 0 en $+\infty$.

– Si $r = s$, le cours nous informe $X' + Y' \hookrightarrow \Gamma(r, 2)$ (c'est la loi d'Erlang, c'est du cours !)

$$(f_{X'} * f_{Y'})(x) = r^2xe^{-rx}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$$

Les variations sont semblables avec un maximum pour $x = r^{-1}$.

– Si $\lambda < 0$ et $\mu < 0$, on obtient un graphe de densité symétrique du précédent par rapport à l'axe des abscisses.

– Si $\lambda\mu < 0$, on peut supposer quitte à les échanger que $\lambda > 0$ et $\mu < 0$. Alors :

$$\begin{aligned} (f_{X'} * f_{-Y'})(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} re^{-rt}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)\, se^{s(x-t)}\mathbf{1}_{[x,+\infty[}(t)\, dt \\ &= rse^{sx}\left(\int_0^{+\infty} e^{-rt-st}dt\right)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_-}(x) + rse^{sx}\left(\int_x^{+\infty} e^{-rt-st}dt\right)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \\ &= \frac{rs}{r+s}\left(e^{sx}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_-}(x) + e^{-rx}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\right) \end{aligned}$$

$f_{X'} * f_{-Y'}$ est définie et continue pp (avec un défaut éventuel de continuité en 0) et puisque X' et Y' sont indépendantes il en est **de même** pour les variables X' et $-Y'$, on en déduit que $Z = X' - Y'$ est une variable à densité dont une densité est donnée par $f_{X'} * f_{-Y'}$. Elle est croissante sur $\mathbb{R}_-$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$ avec un point anguleux en $x = 0$.

2. La variable Z admet une espérance et une variance en tant que combinaison linéaire de telles variables avec :
$$\mathbf{E}(Z) = \frac{\lambda}{a} + \frac{\mu}{b} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(Z) = \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2 + \left(\frac{\mu}{b}\right)^2$$
Nous voulons donc que $\mathbf{E}(Z) = m$ et $\mathbf{V}(Z) = \sigma^2$ ainsi $m^2 - \sigma^2 = 2\frac{\lambda}{a}\frac{\mu}{b}$.

Ayant la somme et produit de nos réels $\dfrac{\lambda}{a}$ et $\dfrac{\mu}{b}$ inconnus nous pouvons dire qu'ils sont solution de l'équation $x^2 - mx + \dfrac{1}{2}\left(m^2 - \sigma^2\right) = 0$ de discriminant $\Delta = m^2 - 2\left(m^2 - \sigma^2\right) = 2\sigma^2 - m^2$.

– Si $\sigma < \dfrac{1}{\sqrt{2}}|m|$ il y a deux solutions :
$$\boxed{\lambda = \frac{a}{2}\left(m \pm \sqrt{2\sigma^2 - m^2}\right) \quad \text{et} \quad \mu = \frac{b}{2}\left(m \mp \sqrt{2\sigma^2 - m^2}\right)}$$

– Si $\sigma = \dfrac{1}{\sqrt{2}}|m|$ il y a une solution double et :
$$\boxed{\lambda = \frac{am}{2} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{bm}{2}}$$

– Si $\sigma > \dfrac{1}{\sqrt{2}}|m|$ il n'y a pas de solution.

13 QSP 13

Signalons pour commencer que nous travaillerons sur $\Omega' = \Omega - \{\omega \mid X(\omega) = 0\}$ avec
$$\mathbf{P}(\{\omega \mid X(\omega) = 0\}) = 0$$
puisque X est une variable à densité. Donc $\Omega = \Omega'$ à un **événement négligeable près**. La variable Y représentant la **partie décimale** de la variable $1/X$ elle est donc à valeurs dans $[0,1[$. Ainsi en notant F_Y la fonction de répartition de Y, nous pouvons affirmer sans peine que :
$$\forall x \in]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[, \quad F_Y(x) = 0 \tag{1}$$
Il en est de même pour F_X puisque X prend presque surement ses valeurs dans le segment $[0,1]$, à savoir :
$$\forall x \in]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[, \quad F_X(x) = 0 \tag{2}$$
Soit $x \in [0,1[$, selon la **formule des probabilités totales** associée au système complet d'événements $\left(\left\lfloor \dfrac{1}{X} \right\rfloor = k\right)_{k \geq 1}$ il vient :
$$\begin{aligned}
F_Y(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}\left([Y \leq x] \cap \left[\left\lfloor \frac{1}{X} \right\rfloor = k\right]\right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}\left(\left[\frac{1}{X} - \left\lfloor \frac{1}{X} \right\rfloor \leq x\right] \cap \left[\left\lfloor \frac{1}{X} \right\rfloor = k\right]\right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}\left(\left[\frac{1}{X} \leq x + k\right] \cap \left[\left\lfloor \frac{1}{X} \right\rfloor = k\right]\right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}\left(\left[\frac{1}{X} \leq x + k\right] \cap \left[k \leq \frac{1}{X} < k + 1\right]\right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}\left(\left[k \leq \frac{1}{X} \leq x + k\right]\right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}\left(\left[\frac{1}{x+k} \leq X \leq \frac{1}{k}\right]\right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln 2} \int_{1/x+k}^{1/k} \frac{dx}{1+x}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln 2} \left[\ln (1+x)\right]_{1/(x+k)}^{1/k} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln 2} \left[\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{x+k}\right)\right] \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln 2} \left[\ln (k+1) - \ln k - \ln (x+k+1) + \ln (x+k)\right] \\
&= \frac{1}{\ln 2} \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} \left[\ln (k+1) - \ln k - \ln (x+k+1) + \ln (x+k)\right] \\
&\quad \text{par définition de la convergence} \\
&= \frac{1}{\ln 2} \lim_{N\to+\infty} \left(\ln (N+1) - \ln (x+N+1) + \ln (x+1)\right) \\
&= \frac{1}{\ln 2} \lim_{N\to+\infty} \left(\ln\left(\frac{N+1}{N+1+x}\right) + \ln (x+1)\right) \\
&= \tfrac{\ln(x+1)}{\ln 2} \\
&\quad \text{puisque } \frac{N+1}{N+1+x} \sim 1 \text{ et } \lim_{a\to 1} \ln a = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\ln 2}\int_0^x \frac{1}{1+t}dt \\
&= F_X(x) \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Bilan selon (1), (2) et (3) :

$$\boxed{F_X = F_Y \text{ et } X \text{ et } Y \text{ suivent la même loi}}$$

14 QSP 14

Posons $Z = \dfrac{X}{X+Y}$ qui est une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $]0,1[$ car X et Y sont des variables positives. Z est donc bornée et admet donc des moments de tous ordres qu'elle soit discrète ou non. Remarquons qu'il en est de même pour $\dfrac{Y}{X+Y}$. Comme X et Y sont indépendantes et de même loi, les deux variables $\dfrac{X}{X+Y}$ et $\dfrac{Y}{X+Y}$ suivent la même loi. Ainsi :

$$\mathbf{E}\left(\frac{X}{X+Y}\right) = \mathbf{E}\left(\frac{Y}{X+Y}\right)$$

Par suite :

$$
\begin{aligned}
1 &= \mathbf{E}\left(\frac{X+Y}{X+Y}\right) \\
&= \mathbf{E}\left(\frac{X}{X+Y}\right) + \mathbf{E}\left(\frac{Y}{X+Y}\right) \\
&= 2\mathbf{E}\left(\frac{X}{X+Y}\right)
\end{aligned}
$$

ainsi :

$$\mathbf{E}\left(\frac{X}{X+Y}\right) = \frac{1}{2} \qquad (4)$$

D'autre part X et Y admettant une espérance il en est de même pour $X+Y$ avec par linéarité de $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{E}(X+Y) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y) = 2\mathbf{E}(X) > 0$$

on en déduit que :

$$\frac{\mathbf{E}(X)}{\mathbf{E}(X+Y)} = \frac{\mathbf{E}(X)}{2\mathbf{E}(X)} = \frac{1}{2} \tag{5}$$

En conclusion selon (1) et (2) :

$$\boxed{\mathbf{E}\left(\frac{X}{X+Y}\right) = \frac{\mathbf{E}(X)}{\mathbf{E}(X+Y)}}$$

15 QSP 15

1. La variable $\sum_{k=1}^{n} X_k$ suit une loi binomiale de paramètres n et $1/4$ en tant que somme de n variables de Bernoulli **indépendantes** (on imagine sans peine l'état des carrosseries **indépendantes**) et de même paramètre $1/4$. Ensuite on sait que $\mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{n}{4}$ et $\mathbf{V}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{3n}{16}$ alors par l'**inégalité de Bienaymé-Tchebychev :**

$$\mathbf{P}\left(\left[\left|\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{n}{4}\right| \geq \frac{n}{2}\right]\right) \leq \frac{3n/16}{(n/2)^2}$$

soit encore :

$$\mathbf{P}\left(\left[\left|\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{n}{4}\right| \geq \frac{n}{2}\right]\right) \leq \frac{3}{4n}$$

Par le théorème d'encadrement :

$$\boxed{\text{La suite } \left(\mathbf{P}\left(\left[\left|\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{n}{4}\right| \geq \frac{n}{2}\right]\right)\right)_{n\geq 1} \text{ converge vers } 0}$$

2. Comme les variables en jeu admettent chacune un moment d'ordre deux en tant que combinaison linéaire de telles variables la covariance du couple $(X_1 + X_2, X_1 - X_2)$ existe et vaut :

$$\mathrm{Cov}(X_1 + X_2, X_1 - X_2) = \mathbf{V}(X_1) - \mathrm{Cov}(X_1, X_2) + \mathrm{Cov}(X_2, X_1) - \mathbf{V}(X_2) = \mathbf{V}(X_1) - \mathbf{V}(X_2)$$

et comme les variables suivent la même loi :

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X_1 + X_2, X_1 - X_2) = 0}$$

16 QSP 16

1. Tout d'abord $T_n(\Omega) = \mathbb{N}$. Calculons $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}([T_n = k])$. Pour cela introduisons une variable Z associée au nombre d'échecs obtenus lors des $k + n - 1$ premiers tirages. Il est clair que $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(k + n - 1, p)$. D'autre part introduisons pour $k + n \in \mathbb{N}^*$, S_{k+n} l'événement "obtenir un succès lors du $k + n^{\text{ème}}$ essai". Ainsi nous avons :

$$[T_n = k] = [Z = k] \cap S_{k+n}$$

d'où pour chaque entier naturel k :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([T_n = k]) &= \mathbf{P}([Z = k] \cap S_{k+n}) \\
&= \mathbf{P}([Z = k]) \times \mathbf{P}(S_{k+n}) \\
&\quad \text{par indépendance des événements} \\
&= \tbinom{n-1+k}{k} p^{n-1} (1-p)^k p
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}([T_n = k]) = \tbinom{n-1+k}{k} p^n (1-p)^k}$$

2. Soit k fixé dans $\mathbb{N}$ calculons $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}([T_n = k])$ lorsque $p = 1 - \lambda/n$, $\lambda \in]0, n[$. Nous avons quand n tend vers l'infini :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([T_n = k]) &= \binom{n-1+k}{k} (1-\lambda/n)^n (\lambda/n)^k \\
&= \binom{n-1+k}{k} \exp(n\ln(1-\lambda/n)) (\lambda/n)^k \\
&= \frac{(n-1+k)\times\cdots\times(n-1+k-k+1)}{k!} \exp(n\ln(1-\lambda/n)) (\lambda/n)^k \\
&= \frac{(n-1+k)\times\cdots\times n}{k!} \exp(n\ln(1-\lambda/n)) (\lambda/n)^k \\
&\sim \frac{n^k}{k!} \exp(n\ln(1-\lambda/n)) (\lambda/n)^k \\
&\sim \frac{\lambda^k}{k!} \exp(n\ln(1-\lambda/n))
\end{aligned}$$

Or $n\ln(1-\lambda/n) \sim -\lambda$ donc $\lim_{n\to+\infty} n\ln(1-\lambda/n) = -\lambda$ ce qui permet de dire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}([T_n = k]) \sim \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$$\boxed{(T_n)_{n\geq 1} \xrightarrow{\mathcal{L}} X \text{ où } X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)}$$

17 QSP 17

Soit $n \geq 1$, la variable Z_n prend presque surement ses valeurs dans $[0, +\infty[$. Nous avons pour $x > 0$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([Z_n \leq x]) &= \left(\mathbf{P}\left(\left[X_1 \leq n^{1/\lambda}x\right]\right)\right)^n \\
&\quad \text{puisque les variables en jeu sont iid} \\
&= \left(1 - \mathbf{P}\left(\left[X_1 > n^{1/\lambda}x\right]\right)\right)^n \\
&= \left(1 - \frac{\alpha}{\left(n^{1/\lambda}x\right)^\lambda} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \\
&= \left(1 - \frac{\alpha}{nx^\lambda} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \\
&= \exp\left(n\ln\left(1 - \frac{\alpha}{nx^\lambda} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

Fisons maintenant x dans $\mathbb{R}_+^*$, comme $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha}{nx^\lambda} + o\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ alors $n\ln\left(1 - \frac{\alpha}{nx^\lambda} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim -\frac{\alpha}{x^\lambda}$ et par continuité de la fonction exp en $-\frac{\alpha}{x^\lambda}$ il vient :

$$\lim_{n\to\infty} \exp\left(n\ln\left(1 - \frac{\alpha}{nx^\lambda} + o\left(\tfrac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp\left(-\frac{\alpha}{x^\lambda}\right) = \exp\left(-\alpha x^{-\lambda}\right)$$

Si $x \leq 0$, $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}([Z_n \leq x]) = 0$ bien sûr !
En rassemblant les résultat il vient donc :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}([Z_n \leq x]) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; x \leq 0 \\ \exp\left(-\alpha x^{-\lambda}\right) & \text{si } \; x > 0 \end{cases}$$

Il ne vous reste plus qu'à vérifier que cette fonction limite converge vers 0 (resp vers 1) en $-\infty$ (en $+\infty$) qu'elle est non décroissante, propriétés auxquelles se rajoutent celle de continuité sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur au moins $\mathbb{R}^*$ pour conclure que :

$$\boxed{\text{La suite } (Z_n)_{n\geq 1} \text{ converge en loi vers une variable à densité } X}$$

dont une densité f est, par exemple, définie par :

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad x\leq 0\\ \dfrac{\lambda\alpha}{x^{\lambda+1}}e^{-\frac{\alpha}{x^{\lambda}}} & \text{si} \quad x>0\end{cases}$$

18 QSP 18

1. La variable Θ_a admet une espérance en tant que combinaison linéaire de telles variables (puisqu'elles admettent chacune une variance) avec par linéarité de l'opérateur $\mathbf{E}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\Theta_a) &= a\mathbf{E}(T_1)+(1-a)\mathbf{E}(T_2)\\ &= a\theta+(1-a)\theta\\ &= \theta\end{aligned}$$

Comme $\mathbf{E}(\Theta_a-\theta)=0$:

$$\boxed{\Theta_a \text{ est-il estimateur sans biais de } \theta}$$

2. Pas de problème d'existence de la variance de Θ_a, avec par indépendance des estimateurs T_1 et T_2 nous avons :

$$\mathbf{V}(\Theta_a)=a^2\mathbf{V}(T_1)+(1-a)^2\mathbf{V}(T_2)=a^2V_1+(1-a)^2V_2$$

Introduisons la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(a)=a^2V_1+(1-a)^2V_2$$

La fonction φ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale avec :

$$\forall a\in\mathbb{R},\quad \varphi'(a)=2a(V_1+V_2)-2V_2$$

– Supposons que $V_1+V_2>0$ alors $\varphi'(a)=0$ si et seulement si $a=\dfrac{V_2}{V_1+V_2}$ et φ est minimale pour $\boxed{a=\dfrac{V_2}{V_1+V_2}}$ et elle vaut :

$$\boxed{\mathbf{V}(\Theta_a)=\frac{V_1V_2}{V_1+V_2}}$$

– Supposons que $V_1+V_2=0$ alors $V_1=V_2=0$ et :

$$\boxed{\mathbf{V}(\Theta_a)=0}$$

19 QSP 19

La variable $\overline{X_n}$ s'exprimant en fonction de la **somme** de n variables **i.i.d.** d'espérance égale à λ et de variance égale à λ/n, le **théorème de la limite centrée** peut s'appliquer et nous assurer que la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable T normale centrée réduite. Soit $\alpha\in\,]0,1[$, Φ la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ et $t_\alpha=\Phi^{-1}\left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right)$. On peut écrire :

$$\mathbf{P}([-t_\alpha\leq T_n\leq t_\alpha])\simeq 1-\alpha$$

soit pour tout λ réel :

$$\mathbf{P}\left(\left[-t_\alpha\leq \sqrt{n}\frac{\overline{X_n}-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\leq t_\alpha\right]\right)\simeq 1-\alpha$$

soit encore :

$$\mathbf{P}\left(\left[\frac{t_\alpha^2+2n\overline{X_n}(\omega)-t_\alpha\sqrt{t_\alpha^2+4n\overline{X_n}(\omega)}}{2n}\leq\lambda\leq\frac{t_\alpha^2+2n\overline{X_n}\omega+t_\alpha\sqrt{t_\alpha^2+4n\overline{X_n}(\omega)}}{2n}\right]\right)\simeq 1-\alpha$$

car nous avons les équivalences pour chaque $\omega \in \Omega$:

$$\begin{aligned}
& \left(\left|\sqrt{n}\frac{\overline{X_n}(\omega)-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right| \leq t_\alpha\right) \\
\iff & \left(n\frac{\left(\overline{X_n}(\omega)-\lambda\right)^2}{\lambda} \leq t_\alpha^2\right) \\
\iff & \left(n\lambda^2 - \lambda\left(t_\alpha^2 + 2n\overline{X_n}(\omega)\right) + n\left(\overline{X_n}\right)^2(\omega) \leq 0\right) \\
\iff & \left(\lambda \in \left[\frac{t_\alpha^2 + 2n\overline{X_n}(\omega) - t_\alpha\sqrt{t_\alpha^2 + 4n\overline{X_n}(\omega)}}{2n}, \frac{t_\alpha^2 + 2n\overline{X_n}(\omega) + t_\alpha\sqrt{t_\alpha^2 + 4n\overline{X_n}(\omega)}}{2n}\right]\right)
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{IC_\alpha(\lambda) = \left[\frac{t_\alpha^2 + 2n\overline{X_n} - t_\alpha\sqrt{t_\alpha^2 + 4n\overline{X_n}}}{2n}, \frac{t_\alpha^2 + 2n\overline{X_n} + t_\alpha\sqrt{t_\alpha^2 + 4n\overline{X_n}}}{2n}\right]}$$

20 QSP 20

Nous avons pour tout entier k de $\{0, \ldots, q\}$:

$$\begin{aligned}
\frac{p}{p+q-k} \times \frac{\binom{q}{k}}{\binom{p+q}{k}} &= \frac{p}{p+q-k} \times \frac{q!}{k!\,(q-k)!} \times \frac{k!\,(p+q-k)!}{(p+q)!} \\
&= \frac{p}{p+q-k} \times \frac{q!}{(q-k)!} \times \frac{(p+q-k)!}{(p+q)!} \\
&= \frac{p}{p+q-k} \times \frac{q!}{p!\,(q-k)!} \times \frac{p!\,(p+q-k)!}{(p+q)!} \\
&= \frac{p}{p+q-k} \times \frac{\binom{p+q-k}{p}}{\binom{p+q}{p}}
\end{aligned}$$

donc par sommation sur k, k allant de 0 à q :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{q} \frac{p}{p+q-k} \times \frac{\binom{q}{k}}{\binom{p+q}{k}} &= \frac{p}{\binom{p+q}{p}} \sum_{k=0}^{q} \frac{\binom{p+q-k}{p}}{p+q-k} \\
&= \frac{p}{\binom{p+q}{p}} \sum_{k=0}^{q} \frac{\frac{p+q-k}{p}\binom{p+q-k-1}{p-1}}{p+q-k} \\
&= \frac{1}{\binom{p+q}{p}} \sum_{k=0}^{q} \binom{p+q-k-1}{p-1} \\
&= \frac{1}{\binom{p+q}{p}} \sum_{i=p-1}^{p+q-1} \binom{i}{p-1} \\
& \quad \text{en posant } i = p+q-k-1 \\
&= \frac{\binom{p+q}{p}}{\binom{p+q}{p}}
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{q} \frac{p}{p+q-k} \times \frac{\binom{q}{k}}{\binom{p+q}{k}} = 1}$$

21 QSP 21

Tout d'abord constatons que pour tout entier naturel $k \geq 0$:

$$k^3 = k(k-1)(k-2) + 3k(k-1) + k$$

et par sommation sur k, k allant de 0 à n avec $n \geq 3$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{k^3-1}{k!} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)(k-2)}{k!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{3k(k-1)}{k!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \\
&= \sum_{k=3}^{n} \frac{k(k-1)(k-2)}{k!} + \sum_{k=2}^{n} \frac{3k(k-1)}{k!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \\
&= \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{(k-3)!} + 3\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}
\end{aligned}$$

Cette dernière relation montre que la limite de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k^3-1}{k!}$ lorsque n tend vers l'infini existe et est finie en tant combinaison linéaire de limites finies. Ainsi la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{k^3-1}{k!}$ converge et de somme :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^3-1}{k!} = 4e}$$

22 QSP 22

Pour commencer il faut dire que cette question a bien un sens car $p \geq n$. En codant les configurations avec des "0" et des " | ", (sachant qu'il y a toujours p "0" et $n-1$ " | "), on pourra commencer par choisir la seule boîte vide (n choix), puis mettre un prospectus dans chaque boîte, sauf dans celle qui doit rester vide (une seule observation) puis mettre les $p-n+1$ lettres restantes dans les boîtes qui peuvent être occupées sans contrainte particulière. Ceci revient à dénombrer des $(p-n+1+n-2)$ –listes comportant $(n-2)$ " | " ce qui donne $\binom{p-1}{n-2}$ distributions.

Le lemme des bergers nous donne

$$\boxed{n\binom{p-1}{n-2} \text{ configurations totales pour le facteur}}$$

23 QSP 23

1. Commençons par exprimer $\mathbf{P}_B(A) - \mathbf{P}_{\overline{B}}(A)$ en fonction des seules probabilités $\mathbf{P}(A\cap B)$, $\mathbf{P}(A)$ et $\mathbf{P}(B)$. Cela donne :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_B(A) - \mathbf{P}_{\overline{B}}(A) &= \frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(B)} - \frac{\mathbf{P}\left(A\cap \overline{B}\right)}{\mathbf{P}\left(\overline{B}\right)} \\
&= \frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(B)} - \left(\frac{\mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A\cap B)}{1-\mathbf{P}(B)}\right) \\
&= \frac{\mathbf{P}(A\cap B)(1-\mathbf{P}(B)) - (\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A\cap B))}{\mathbf{P}(B)(1-\mathbf{P}(B))} \\
&= \frac{\mathbf{P}(A\cap B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(B)(1-\mathbf{P}(B))}
\end{aligned}$$

Ainsi nous avons les équivalences successives suivantes :

$$\begin{aligned}
&\left(|\mathbf{P}(A\cap B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)| \leq \frac{1}{4}\left|\mathbf{P}_B(A) - \mathbf{P}_{\overline{B}}(A)\right|\right) \\
\Longleftrightarrow\ &\left(|\mathbf{P}(A\cap B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)| \leq \frac{1}{4}\left|\frac{\mathbf{P}(A\cap B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(B)(1-\mathbf{P}(B))}\right|\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\iff \left(|\mathbf{P}(A\cap B)-\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)|\,\mathbf{P}(B)(1-\mathbf{P}(B))\leq \frac{1}{4}|\mathbf{P}(A\cap B)-\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)|\right)\\ &\iff \left(|\mathbf{P}(A\cap B)-\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)|\left(\mathbf{P}(B)(1-\mathbf{P}(B))-\frac{1}{4}\right)\leq 0\right) \qquad (6)\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est toujours vraie puisque :
- $|\mathbf{P}(A\cap B)-\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)|\geq 0$ et
- $\mathbf{P}(B)(1-\mathbf{P}(B))-\dfrac{1}{4}\leq 0$.

  En effet rappelez-vous de ce que l'on a dit sur la fonction f définie sur $[0,1]$ par :

$$f(x)=x(1-x)$$

  Ayant raisonné par **équivalences successives** l'inégalité proposée est donc **vraie**.

2. Si $A\subset B$, $\mathbf{P}(A\cap B)=\mathbf{P}(A)$ et $\mathbf{P}_{\overline{B}}(A)=0$. L'inégalité donne :

$$|\mathbf{P}(A)-\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)|\leq \frac{1}{4}\mathbf{P}_B(A)$$

soit encore :

$$\boxed{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}\left(\overline{B}\right)\leq \frac{1}{4}\mathbf{P}_B(A)}$$

3. Selon (1) les cas d'égalité seront obtenus si, et seulement si :

$$\boxed{A \text{ et } B \text{ indépendants ou bien si } \mathbf{P}(B)=\frac{1}{2}}$$

N'oubliez pas que la fonction f définie ci-dessus atteint la valeur (maximale) $1/4$ que pour $x=1/2$.

24 QSP 24

Il n'y a pas à faire dans la finesse sachant que X et Y prennent chacune leurs valeurs dans $\{0,1\}$. Commençons par la donnée de $Z(\Omega)$. Nous avons :

$$Z(\Omega)=\left\{\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{i\cos\theta+ij+1}\mid (i,j)\in\{0,1\}^2\right\}=\left\{\int_0^{\pi/2}d\theta,\ \int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\cos\theta+1},\ \int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\cos\theta+2}\right\}$$

avec :
- $\displaystyle\int_0^{\pi/2}d\theta=\frac{\pi}{2}$
- $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\cos\theta+1}=1$ en posant $\theta=2\operatorname{Arctan}t$ $\left(\text{où } d\theta=\dfrac{2dt}{1+t^2}\right)$ changement de variable bijectif croissant de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée non nulle sur $[0,1]$ et à valeurs dans $[0,\pi/2]$. Comme ce n'est pas à vous que j'apprendrai que $\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ alors :

$$\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\cos\theta+1}=\int_0^1\frac{2}{1+t^2}\frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}+1}dt=\int_0^1 dt=1$$

- $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\cos\theta+2}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ en posant le même changement de variable $\theta=2\operatorname{Arctan}t$ $\left(\text{où } d\theta=\dfrac{2dt}{1+t^2}\right)$ changement de variable bijectif croissant de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée non nulle sur $[0,1]$ et à valeurs dans $[0,\pi/2]$. Comme ce n'est pas à vous que j'apprendrai que $\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ alors :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\cos\theta+2} &= \int_0^1\frac{2}{1+t^2}\frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}+2}dt\\ &= \int_0^1\frac{2dt}{3+t^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2/3} \\ &= \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{dt}{1+\left(t/\sqrt{3}\right)^2} \\ &= 2\left[\sqrt{3}\,\mathrm{Arctan}\left(\tfrac{t}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Il vient alors par indépendance de X et Y :

- $\mathbf{P}\left([Z=\pi/2]\right) = \mathbf{P}\left([X=0]\right) = 1-p$
- $\mathbf{P}\left([Z=1]\right) = \mathbf{P}\left([X=1]\cap[Y=0]\right) = \mathbf{P}\left([X=1]\right)\mathbf{P}\left([Y=0]\right) = p\,(1-p)$
- $\mathbf{P}\left(\left[Z=\pi/3\sqrt{3}\right]\right) = \mathbf{P}\left([X=1]\cap[Y=1]\right) = \mathbf{P}\left([X=1]\right)\mathbf{P}\left([Y=1]\right) = p^2$

En résumé :

k	1	$\pi/2$	$\pi/3\sqrt{3}$
$\mathbf{P}\left([Z=k]\right)$	$p\,(1-p)$	$1-p$	p^2

Une question que vous vous êtes posée : mais d'où sort ce changement de variable de folie sans coaching ?

RÉPONSE :

Intégration des fractions rationnelles en $\sin, \cos, \tan$ (hors programme mais ...)

(Règles de Bioche ou méthode des invariants) *Notons f la fonction à intégrer.*

▲ *Si la transformation de x en $-x$ laisse $f(x)\,dx$ invariant, alors on posera le changement de variable $u=\cos x$ alors $du = -\sin x\; dx$.*

▲ *Sinon, si la transformation de x en $\pi - x$ laisse $f(x)\,dx$ invariant, alors on posera le changement de variable $u = \sin x$ alors $du = \cos x dx$.*

▲ *Sinon, si la transformation de x en $\pi + x$ laisse $f(x)\,dx$ invariant, alors on posera le changement de variable $u = \tan x$ alors $du = \left(1+\tan^2 x\right) dx$ alors $du = \left(1+u^2\right) dx$.*

▲ *Sinon, on pourra toujours poser le changement de variable $u = \tan\dfrac{x}{2}$*

alors $du = \dfrac{1}{2}\left(1+\tan^2\dfrac{x}{2}\right) dx$ soit encore $du = \dfrac{1}{2}\left(1+u^2\right) dx$ dans ce cas nous avons :

$$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad \sin x = \frac{2u}{1+u^2} \quad \tan x = \frac{2u}{1-u^2}$$

Vous remarquerez donc que le changement de variable $u = \tan\dfrac{x}{2}$ est toujours opérationnel. C'est celui qui a servi dans l'exercice. Retenez-le bien et oubliez les autres ...

Quel que soit le changement de variable utilisé nous nous ramènerons systématiquement à une fraction rationnelle “classique”.

Exemples

Dans tout ce qui va suivre c désigne un réel.

- $\displaystyle\int^u \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\tan\left(\frac{u}{2}\right)\right| + c$
- $\displaystyle\int^u \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\tan\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + c$
- $\displaystyle\int^u \frac{dx}{\sin x+\cos x+2} = \sqrt{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\left(2\tan\left(\frac{1}{2}u\right)+2\right)\right) + c$
- $\displaystyle\int^u \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{\cos u}{\sin u} + c$

25 QSP 25

Pour tous réels positifs c et t nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left([X \geq t]\right) &= \mathbf{P}\left([X+c \geq t+c]\right) \\ &\leq \mathbf{P}\left(\left[(X+c)^2 \geq (t+c)^2\right]\right) \\ &\quad \text{car } x \mapsto x^2 \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\mathbf{E}\left((X+c)^2\right)}{(t+c)^2} \\
&\quad \text{par l'}\textbf{inégalité de Markov} \\
&\leq \frac{\mathbf{V}(X+c)+(\mathbf{E}(X+c))^2}{(t+c)^2} \\
&\quad \text{par "}\textbf{THK inversée}\text{"} \\
&\leq \frac{\mathbf{V}(X)+(\mathbf{E}(X)+c)^2}{(t+c)^2} \\
&\leq \frac{\mathbf{V}(X)+c^2}{(t+c)^2} \\
&\leq \frac{\sigma^2+c^2}{(t+c)^2} \\
&\leq \frac{\sigma^2+\dfrac{\sigma^4}{t^2}}{\left(t+\dfrac{\sigma^2}{t}\right)^2} \\
&\quad \text{en posant } c=\sigma^2/t \\
&\leq \frac{t^2\sigma^2+\sigma^4}{(\sigma^2+t^2)^2} \\
&\leq \frac{\sigma^2\left(\sigma^2+t^2\right)}{(\sigma^2+t^2)^2} \\
&\leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2+t^2} \text{ CQFD}
\end{aligned}$$

26 QSP 26

Soit $\omega \in \Omega$, le spectre de $M(\omega)$ saute aux yeux puisque celle-ci est triangulaire supérieure, ainsi ses valeurs propres sont $X(\omega)$ et $Y(\omega)$. La condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité de $M(\omega)$ est que $X(\omega) \neq Y(\omega)$ car $M(\omega)$ n'est pas une matrice scalaire (présence d'un "1" hors la diagonale principale de la matrice), elle ne peut être semblable à une matrice $D(\omega) = \begin{bmatrix} X(\omega) & 0 \\ 0 & X(\omega) \end{bmatrix}$ en cas où $\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) = Y(\omega)$, en effet l'égalité $PD(\omega)P^{-1} = X(\omega)I$ n'est pas possible à obtenir puisque $\forall \omega \in \Omega,\ M(\omega) \neq X(\omega)I$. En conclusion :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\text{"}M \text{ est diagonalisable"}) &= \mathbf{P}([X \neq Y]) \\
&= 1-\mathbf{P}([X=Y]) \\
&= 1-\sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}([X=Y]\cap[X=k]) \\
&= 1-\sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}([X=k]\cap[Y=k]) \\
&= 1-\sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}([X=k])\,\mathbf{P}([Y=k]) \\
&\quad \text{par indépendance de } X \text{ et } Y \\
&= 1-\sum_{k=0}^{n}(\mathbf{P}([X=k]))^2 \\
&\quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ suivent la même loi} \\
&= 1-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \\
&= 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2
\end{aligned}$$

Selon le célèbre violoniste français Vandermonde :

$$\boxed{\mathbf{P}\left(\text{“}M(\omega)\ \text{ est diagonalisable”}\right) = 1 - \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}$$

27 QSP 27

– Tout d'abord $\left(\dfrac{1}{p^2q^2}\right)_{\left\{\substack{(p,q)\in(\mathbf{N}^*)^2 \\ p|q}\right.}$ est une **sous-famille** de la famille $\left(\dfrac{1}{p^2q^2}\right)_{(p,q)\in(\mathbf{N}^*)^2}$ dont le terme général positif est celui d'une série double convergente (produit d'Hadamard, qui je le répète est hors programme, mais vous savez faire par Fubini). Par **théorème de comparaison** appliqué aux séries doubles à termes positifs, la série proposée converge donc absolument à son tour.

– Passons au calcul de la somme en utilisant le **théorème de sommation par paquets** qui nous donne :

$$\begin{aligned}
\sum_{\left\{\substack{(p,q)\in(\mathbf{N}^*)^2 \\ p|q}\right.} \frac{1}{p^2q^2} &= \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}\sum_{\left\{\substack{q\in\mathbf{N}^* \\ p|q}\right.}\frac{1}{q^2} \\
&= \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(np)^2} \\
&= \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^4}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right) \\
&= \underbrace{\left(\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^4}\right)}_{\text{somme de série cvte}}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\sum_{\left\{\substack{(p,q)\in(\mathbf{N}^*)^2 \\ p|q}\right.} \frac{1}{p^2q^2} = \frac{\pi^4}{90}\times\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^6}{540}}$$

28 QSP 28

Il vient immédiatement, du moins je l'espère, que :

$$\begin{aligned}
R &= \det A^tA \\
&= \left(U^2+X^2\right)\left(V^2+Y^2\right) - (UV+XY)^2 \\
&= U^2Y^2 - 2UVXY + V^2X^2 \\
&= (UY-VX)^2
\end{aligned}$$

puisque :

$$A^tA = \begin{bmatrix} U & X \\ V & Y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U & V \\ X & Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U^2+X^2 & UV+XY \\ UV+XY & V^2+Y^2 \end{bmatrix}$$

R est bien une variable aléatoire discrète en tant que somme et produit de telles variables, c'est du cours. Toujours d'après le cours U,V,X et Y étant quatre variables aléatoires discrètes indépendantes possédant un moment d'ordre deux, U^2,V^2,X^2 et Y^2 restent indépendantes et admettent une espérance. Dès lors U^2Y^2, $UVXY$ et V^2X^2 admettent une espérance de même que $R = U^2Y^2 - 2UVXY + V^2X^2$ en tant que **combinaison linéaire** de telles variables. Je rappelle à cette occasion que X,Y admettant un **moment d'ordre deux** entraîne que XY admet un **moment d'ordre un**. En revanche X,Y **indépendante** admettant un **moment d'ordre un** entraîne que XY admet un **moment d'ordre un.**

Finalement :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(R) &= \mathbf{E}\left(U^2Y^2 - 2UVXY + V^2X^2\right)\\ &= \mathbf{E}\left(U^2Y^2\right) - 2\mathbf{E}(UVXY) + \mathbf{E}\left(V^2X^2\right)\\ &= \mathbf{E}\left(U^2\right)\mathbf{E}\left(Y^2\right) - 2\mathbf{E}(U)\mathbf{E}(V)\mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) + \mathbf{E}\left(V^2\right)\mathbf{E}\left(X^2\right)\\ &= \left(\mathbf{V}(U) + (\mathbf{E}(U))^2\right)^2 - 2(\mathbf{E}(X))^4 + \left(\mathbf{V}(X) + (\mathbf{E}(X))^2\right)^2\\ &= 2\left(\mathbf{V}(X) + (\mathbf{E}(X))^2\right)^2 - 2(\mathbf{E}(X))^4\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{E}(R) = 2\sigma^2\left(\sigma^2 + 2\mu^2\right)}$$

29 QSP 29

1. Comme nous considérons que les variables $U_1, \ldots, U_n$ sont mutuellement indépendantes, ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n} U_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$$

c'est du cours ! Alors :

$$\boxed{\mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{n} U_k\right) = np \quad \text{et} \quad \mathbf{V}\left(\sum_{k=1}^{n} U_k\right) = np(1-p)}$$

2. Comme la probabilité $\mathbf{P}([U_2 = 0] \cap [U_4 = 1])$ est non nulle, la probabilité conditionnelle a bien un sens, avec par définition, pour chaque entier k de $[\![1, n-1]\!]$:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{[U_2=0]\cap[U_4=1]}\left(\left[\sum_{i=1}^{n} U_i = k\right]\right) &= \frac{\mathbf{P}\left([\sum_{i=1}^{n} U_i = k] \cap [U_2 = 0] \cap [U_4 = 1]\right)}{\mathbf{P}([U_2 = 0] \cap [U_4 = 1])}\\ &= \frac{\mathbf{P}\left([\sum_{i\in[\![1,n]\!]-\{2,4\}} U_i = k-1] \cap [U_2 = 0] \cap [U_4 = 1]\right)}{\mathbf{P}([U_2 = 0] \cap [U_4 = 1])}\\ &= \frac{\mathbf{P}\left([\sum_{i\in[\![1,n]\!]-\{2,4\}} U_i = k-1]\right)\mathbf{P}([U_2 = 0] \cap [U_4 = 1])}{\mathbf{P}([U_2 = 0] \cap [U_4 = 1])}\\ &\quad \text{par le lemme des coalitions}\\ &= \mathbf{P}\left([\sum_{i\in[\![1,n]\!]-\{2,4\}} U_i = k-1]\right)\end{aligned}$$

Or la variable $\sum_{i\in[\![1,n]\!]-\{2,4\}} U_i$ suit la loi $\mathcal{B}(n-2,p)$ donc :

$$\boxed{\mathbf{P}_{[U_2=0]\cap[U_4=1]}\left([\sum_{i=1}^{n} U_i = k]\right) = \begin{cases}\binom{n-2}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-1-k} & \text{si } k \in [\![1, n-1]\!]\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}}$$

3. Encore une fois la probabilité conditionnelle demandée a bien un sens puisque $\mathbf{P}([\sum_{i=1}^{n} U_i = k]) \neq 0$.

Par définition de la probabilité condtionnelle :

$$\mathbf{P}_{\left[\sum_{i=1}^{n} U_i > 0\right]}\left(\left[\sum_{i=1}^{n} U_i = k\right]\right) = \frac{\mathbf{P}\left([\sum_{i=1}^{n} U_i = k] \cap [\sum_{i=1}^{n} U_i \neq 0]\right)}{\mathbf{P}\left([\sum_{i=1}^{n} U_i \neq 0]\right)} = \begin{cases}0 & \text{si} \quad k = 0\\ \frac{\mathbf{P}\left(\left[\sum_{i=1}^{n} U_i = k\right]\right)}{\mathbf{P}\left(\left[\sum_{i=1}^{n} U_i \neq 0\right]\right)} & \text{si} \quad k \in [\![1, n]\!]\end{cases}$$

puisque $[\sum_{i=1}^{n} U_i = k] \subset [\sum_{i=1}^{n} U_i \neq 0]$.

$$\boxed{\mathbf{P}_{\left[\sum_{i=1}^{n} U_i>0\right]}\left(\left[\sum_{i=1}^{n} U_i = k\right]\right) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k=0 \\ \dfrac{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}{1-(1-p)^n} & \text{sinon} \quad k \in [\![1,n]\!] \end{cases}}$$

4. L'événement $[U_1 \leq U_2 \leq \cdots \leq U_n]$ est réalisé si, et seulement si :
   - soit pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $U_k = 0$;
   - soit il existe $k \in [\![1,n-1]\!] \mid U_1 = U_2 = \cdots = U_k = 0$ et $U_{k+1} = U_{k+2} = \cdots = U_n = 1$;
   - soit pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $U_k = 1$.

   Cela se traduit formellement par :

$$[U_1 \leq U_2 \leq \cdots \leq U_n] = \bigcap_{i=1}^{n} [U_i = 0] \biguplus_{k=1}^{n-1} \left(\left(\bigcap_{i=1}^{k} [U_i = 0]\right) \cap \left(\bigcap_{i=k+1}^{n} [U_i = 1]\right)\right) \biguplus \left(\bigcap_{i=1}^{n} [U_i = 1]\right)$$

   Par $\sigma-$additivité de $\mathbf{P}$ on a :

$$\mathbf{P}\left([U_1 \leq U_2 \leq \cdots \leq U_n]\right) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [U_i = 0]\right) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} [U_i = 0]\right) \cap \left(\bigcap_{i=k+1}^{n} [U_i = 1]\right) + \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [U_i = 1]\right)$$

   Puis par indépendance muruelle des variables U_k pour $k \in [\![1,n]\!]$ il vient :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left([U_1 \leq U_2 \leq \cdots \leq U_n]\right) &= q^n + \sum_{k=1}^{n-1} q^k p^{n-k} + p^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} q^k p^{n-k} \\ &= p^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{q}{p}\right)^k \end{aligned}$$

   Une discussion s'impose alors.
   - Si $p = 1/2$ alors $q = 1/2$ et $q/p = 1$ et :

$$\mathbf{P}\left([U_1 \leq U_2 \leq \cdots \leq U_n]\right) = (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

   - Si $p \neq 1/2$ alors $q/p \neq 1$ et :

$$\mathbf{P}\left([U_1 \leq U_2 \leq \cdots \leq U_n]\right) = p^n \left(\frac{1-(q/p)^{n+1}}{1-q/p}\right) = \frac{p^{n+1} - q^{n+1}}{p-q}$$

   Bilan :

$$\boxed{\mathbf{P}\left([U_1 \leq U_2 \leq \cdots \leq U_n]\right) = \begin{cases} (n+1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n & \text{si } p = q = 1/2 \\ \dfrac{p^{n+1} - q^{n+1}}{p-q} & \text{sinon} \end{cases}}$$

30 QSP 30

L'ensemble des valeurs prises par Y est $\mathbb{R}_+$ presque surement. Sur cet ensemble la fonction racine cubique est strictement monotone et elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, $|X|$ étant à densité (déjà vue l'exemple du cours **23.7** à la page **189**, à reprouver le 07 mai), dès lors Y reste une variable à densité. Notons F_Y la fonction de répartition de Y définie sur $\mathbb{R}$ par $F_Y(x) = \mathbf{P}([Y \leq x])$.

- Si $x < 0$, $F_Y(x) = 0$.

– Si $x \geq 0$,

$$\begin{aligned}
{}_Y(x) &= \mathbf{P}([Y \leq x]) \\
&= \mathbf{P}\left(\left[\sqrt[3]{|X|} \leq x\right]\right) \\
&= \mathbf{P}\left(\left[|X| \leq x^3\right]\right) \\
&\quad \text{car la fonction } x \mapsto x^3 \text{ est une bijection croissante sur } \mathbb{R}_+ \\
&= \mathbf{P}\left(\left[-x^3 \leq X \leq x^3\right]\right) \\
&= \Phi\left(x^3\right) - \Phi\left(-x^3\right) \\
&\quad \Phi \text{ est la fonction de répartition de } X
\end{aligned}$$

Par dérivation de F_Y sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient une densité de Y notée f_Y sans oublier de poser, arbitrairement, que $f_Y(0) = 0$ ce qui donne :

$$\boxed{f_Y(x) = \left(3x^2 f_Y\left(x^3\right) + 3x^2 f_Y\left(-x^3\right)\right) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x) = \frac{6x^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^6/2} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)}$$

31 QSP 31

1. Question classique, f est définie et positive sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R} - \{1\}$ et d'intégrale convergente sur $\mathbb{R}$, car elle coïncide avec la fonction nulle sur $]-\infty, 1]$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} x^2 e^{-(x-1)} = 0$ par croissance comparée et prolongeable par continuité en 1. Vous connaissez la suite ... Enfin pour $c \in]1, +\infty[$:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f &= \int_1^{+\infty} f \\
&= \int_1^{+\infty} e^{-(x-1)} dx \\
&= \lim_{A \to 1} \int_A^c e^{-(x-1)} dx + \lim_{B \to +\infty} \int_c^B e^{-(x-1)} dx \\
&= \lim_{A \to 1} \left[-e^{-(x-1)}\right]_A^c + \lim_{B \to +\infty} \left[-e^{-(x-1)}\right]_c^B \\
&= \lim_{A \to 1} \left(-e^{-(c-1)} + e^{-(A-1)}\right) + \lim_{B \to +\infty} \left(-e^{-(B-1)} + e^{-(c-1)}\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

2. Les deux variables X et Y sont **indépendantes** et densités **bornées** (une seule suffit), la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t)\, dt$$

est continue presque partout et représente une **densité** de $X + Y$. Nous avons les équivalences :

$$(f_X(t) f_Y(x-t) \neq 0) \Longleftrightarrow \left(\left\{\begin{array}{l} t \geq 1 \\ 0 \leq x - t \leq 2 \end{array}\right.\right) \Longleftrightarrow (\max(1, x-2) \leq t \leq x)$$

N'oublions pas que la variable $X+Y$ prend ses valeurs presque surement ses valeurs dans l'intervalle $[1, +\infty[$, donc h est nulle en dehors de celui-ci.

– Si $x \in [1, 3]$ alors $\max(1, x-2) = 1$ et

$$h(x) = \int_1^x f_X(t) f_Y(x-t)\, dt = \int_1^x e^{-(t-1)} dt = 1 - e^{1-x}$$

– Si $x > 3$ alors $\max(1, x-2) = x - 2$ et

$$h(x) = \int_{x-2}^x f_X(t) f_Y(x-t)\, dt = \int_{x-2}^x e^{-(t-1)} dt = e^{-x}\left(e^3 - e\right)$$

Faisons le bilan :

$$\boxed{h(x) = \left(1 - e^{1-x}\right) \mathbf{1}_{[1,3]}(x) + e^{-x}\left(e^3 - e\right) \mathbf{1}_{]3,+\infty[}(x)}$$

32 QSP 32

1. L'application $\varphi : x \mapsto \sin(\pi x)$ n'étant pas monotone sur $[0,1[= X(\Omega)$ p.s., **nous ne pouvons affirmer, pour le moment, que Y est une variable à densité** ... Introduisons donc F_Y la fonction de répartition de Y définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Y(x) = \mathbf{P}([Y \leq x])$$

avec $Y(\Omega) = [0,1]$ p.s.
– Si $x < 0$, $F_Y(x) = 0$.
– Si $x > 1$, $F_Y(x) = 1$.
– Si $x \in [0,1]$,

$$F_Y(x) = \mathbf{P}([\sin(\pi X) \leq x]) = \mathbf{P}([0 \leq \pi X \leq \operatorname{Arcsin} x] \uplus [\pi - \operatorname{Arcsin} x \leq \pi X \leq \pi])$$

car rappelons, un dessin du cercle trigonométrique suffit pour le comprendre, que :

$$\forall x \in [0,\pi], \quad (\sin x \leq a) \iff (x \in [0, \operatorname{Arcsin} a] \uplus [\pi - \operatorname{Arcsin} a, \pi])$$

Donc

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbf{P}\left(\left[0 \leq X \leq \frac{1}{\pi}\operatorname{Arcsin} x\right] \uplus \left[1 - \frac{1}{\pi}\operatorname{Arcsin} x \leq X \leq 1\right]\right) \\ &= F_X\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{Arcsin} x\right) + 1 - F_X\left(1 - \frac{1}{\pi}\operatorname{Arcsin} x\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\operatorname{Arcsin} x + 1 - \left(1 - \frac{1}{\pi}\operatorname{Arcsin} x\right) \\ &\quad \text{puisque } X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[) \\ &= \frac{2}{\pi}\operatorname{Arcsin} x \end{aligned}$$

Bilan :

$$F_Y(x) = \left(\frac{2}{\pi}\operatorname{Arcsin} x\right)\mathbf{1}_{[0,1]}(x) + \mathbf{1}_{]1,+\infty[}(x)$$

Je vous laisse vérifier que F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur au moins $\mathbb{R} - \{-1,1\}$, ainsi Y est une variable à densité, de densité f_Y définie, par exemple, par :

$$\boxed{f_Y(x) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}\mathbf{1}_{]0,1[}(x)}$$

2. L'application $\Psi : x \mapsto \tan x$ **est de classe $\mathcal{C}^1$ strictement monotone** (croissante) **et de dérivée non nulle sur** $]-\pi/2, \pi/2[= \theta(\Omega)$ p.s., nous pouvons affirmer à 100% que **Z est une variable à densité** ... Introduisons donc F_Z la fonction de répartition de Y définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Z(x) = \mathbf{P}([Z \leq x]) = \mathbf{P}([\theta \leq \operatorname{Arctan} x]) = F_\theta(\operatorname{Arctan} x)$$

et comme $\theta \hookrightarrow \mathcal{U}(]-\pi/2, \pi/2[)$, il vient directement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Z(x) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{Arctan} x\right)$$

car rappelons que :

$$F_\theta(x) = \frac{1}{\pi}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\mathbf{1}_{]-\pi/2,\pi/2[}(x) + \mathbf{1}_{]\pi/2,+\infty[}(x)$$

Par dérivation ...

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_Z(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}}$$

Conclusion $Z \hookrightarrow \mathcal{C}(1)$ mais c'est hors programme !

33 QSP 33

1. Soit x un réel et k un entier de $[\![1,n]\!]$, l'événement $[Y_k \leq x]$ est réalisé si et seulement si au moins k des variables aléatoires X_i, qu'il faut choisir, prennent une valeur inférieure ou égale à x avec une probabilité égale à $F(x)$. Autrement dit il existe exactement j variables, j variant de k à n qu'il faut les choisir parmi les n, inférieures ou égales à x et $n-j$ supérieures strictement à x avec une probabilité de $1-F(x)$. Comme nous sommes dans le cas n expériences indépendantes, il vient :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall k \in [\![1,n]\!], \quad \mathbf{P}([Y_k \leq x]) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} F(x)^j (1-F(x))^{n-j}}$$

   Une autre rédaction implacable. Introduisons une variable C égale au nombre de variables (qui sont indépendantes dans leur ensemble) prenant une valeur inférieure ou égale à x. Etant en présence d'un schéma binomial, C suit la loi binomiale de paramètre n et $F(x)$. Dès lors l'événement $[Y_k \leq x]$ est réalisé si et seulement si au moins k des variables aléatoires parmi $X_1, \ldots, X_n$ qui prennent une valeur inférieure ou égale à x. Donc $[Y_k \leq x] = [C \geq k] = \bigcup_{j=k}^{n} [C = i]$.

   Par $\sigma-$additivité de $\mathbf{P}$ on obtient bien le résultat.

2. Je vous laisse vérifier les classes de F_k faisant conclure que Y_k est une variable à densité de densité f_k obtenue par dérivation de F_k sur $\mathbb{R}^* - I$ où I est un ensemble fini de points éventuellement vide, et nous poserons, par exemple, qu'aux différents points de I la fonction f_k prend la valeur 0 ce qui donne :

$$\begin{aligned} f_k(x) &= \begin{cases} \sum_{j=k}^{n} j\binom{n}{j} F(x)^{j-1} f(x) (1-F(x))^{n-j} - \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} F(x)^j (n-j)(1-F(x))^{n-j-1} f(x) & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sum_{j=k}^{n} n\binom{n-1}{i-1} F(x)^{j-1} f(x) (1-F(x))^{n-j} - \sum_{j=k}^{n} n\binom{n-1}{j} F(x)^j (1-F(x))^{n-j-1} f(x) & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} n\binom{n-1}{k-1} f(x) F(x)^{k-1} (1-F(x))^{n-k} - 0 & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

   par télescopage

$$\boxed{f_k(x) = \begin{cases} n\binom{n-1}{k-1} f(x) F(x)^{k-1} (1-F(x))^{n-k} & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

34 QSP 34

Soit $i \in [\![1,n]\!]$, nous avons :

$$\cos(Y_i)(\Omega) = \left\{\cos 0, \cos\left(\frac{\pi}{3}\right), \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right), \cos\left(\frac{3\pi}{3}\right), \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right), \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right\} = \left\{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}$$

et

$$\mathbf{E}\cos(Y_i) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1\right) = 0$$

d'où :

$$\mathbf{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = 0$$

Nous sommes dans les hypothèses d'application de la **loi faible des grands nombres** nous permettant d'affirmer que :

$$\boxed{\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\geq 1} \text{ converge en probabilité vers } 0}$$

35 QSP 35

Soit $g : t \mapsto g(t) = \mathbf{E}\left((X-t)^2\right)$ où $t \in \mathbb{R}$, g est bien définie car X admet un moment d'ordre deux donc une espérance avec par linéarité de l'espérance $g(t) = t^2 - 2t\mathbf{E}(X) + \mathbf{E}\left(X^2\right)$. g est donc une fonction polynomiale dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $g'(t) = 2t - 2\mathbf{E}(X)$. Une rapide étude des variations de g montre qu'elle admet un minimum global en $t = \mathbf{E}(X)$.

36 QSP 36

Les propriétés de la fonction exp de classe $\mathcal{C}^1$ strictement monotone (donc bijective) et de dérivée non nulle sur $\mathbb{R}$ égale à $X(\Omega)$ nous pouvons dire que Z est une variable à densité. Elle à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$ ce qui implique que sa fonction de répartition noté F_Z est nulle sur $\mathbb{R}_-$ et égale à $F_X(\ln x)$ si $x > 0$. Par dérivation de F_Z sur $\mathbb{R}^*$ on obtient une densité f_Z de Z et en posant par exemple $f_Z(0) = 0$ il vient $f_Z(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{1}{2}\ln^2 x\right) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$.

37 QSP 37

Posons $\phi : A \mapsto \displaystyle\int_0^A (1 - F(t))\,dt$ définie sur $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. Calculons $\phi(A)$ et appliquons la formule d'intégration par parties aux fonctions $u : t \mapsto 1 - F(t)$ et $v : t \mapsto t$ toutes deux de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. Nous obtenons donc :

$$\int_0^A (1 - F(t))\,dt = [t(1 - F(t))]_0^A + \int_0^A tf(t)\,dt = A(1 - F(A)) + \int_0^A tf(t)\,dt \tag{7}$$

Or $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_0^A tf(t)\,dt = \mathbf{E}(X)$ puisque X est une variable positive admettant une espérance et d'autre part $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} A(1 - F(A)) = 0$ puisque :

$$\begin{array}{rcl} A(1-F(A)) & = & A\mathbf{P}([X > A]) \\ & = & A\displaystyle\int_A^{+\infty} f(t)\,dt \\ & \leq & \displaystyle\int_A^{+\infty} tf(t)\,dt \end{array}$$

et $\displaystyle\lim_{A\to\infty} \int_A^{+\infty} tf(t)\,dt = 0$ en tant que reste d'intégrale convergente puisque X admet une espérance.

Par passage à la limite dans l'égalité (1), on obtient donc :

$$\boxed{\lim_{A\to\infty} \int_0^A (1 - F(t))\,dt = \int_0^{+\infty} (1 - F(t))\,dt = \mathbf{E}(X)}$$

38 QSP 38

Comme les deux variables X et Y sont des variables à densité indépendantes, le cours nous enseigne que $X - Y$ reste une variable à densité (admis) et comme les deux événements $[X = Y]$ et $[X - Y = 0]$ sont égaux, il vient donc $\mathbf{P}([X = Y]) = 0$.

39 QSP 39

1. Intégrons par parties comme préconisé en posant $u : t \mapsto 1/t$ et $v : t \mapsto -e^{-t^2/2}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ dans ce cas en fixant $A \geq x$ il vient :

$$\int_x^A e^{-t^2/2}dt = \left[-\frac{e^{-t^2/2}}{t}\right]_x^A - \int_x^A \frac{e^{-t^2/2}}{t^2}dt = -\frac{e^{-A^2/2}}{A} + \frac{e^{-x^2/2}}{x} - \int_x^A \frac{e^{-t^2/2}}{t^2}dt \leq \frac{e^{-x^2/2}}{x}$$

Comme :

$$\lim_{A\to+\infty}\int_x^A e^{-t^2/2}dt = \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}dt$$

et :

$$\lim_{A\to+\infty}\frac{e^{-x^2/2}}{x} = \frac{e^{-x^2/2}}{x}$$

le théorème de prolongement des inégalités nous assure que :

$$\forall x>0,\quad \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}dt \leq \frac{e^{-x^2/2}}{x} \tag{8}$$

Fixons encore une fois A dans $[x,+\infty[$ (x fixé dans $\mathbb{R}_+^*$) et intégrons par parties $\displaystyle\int_x^A \frac{e^{-t^2/2}}{t^2}dt = \int_x^A \frac{te^{-t^2/2}}{t^3}dt$ en posant $u_1 : t\mapsto 1/t^3$ et $v_1 : t\mapsto -e^{-t^2/2}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ on obtient :

$$\begin{aligned}\int_x^A \frac{e^{-t^2/2}}{t^2}dt &= \left[-\frac{e^{-t^2/2}}{t^3}\right]_x^A - \int_x^A \frac{3e^{-t^2/2}}{t^4}dt \\ &= -\frac{e^{-A^2/2}}{A^3} + \frac{e^{-x^2/2}}{x^3} - \int_x^A \frac{3e^{-t^2/2}}{t^4}dt \\ &\leq \frac{e^{-x^2/2}}{x^3}\end{aligned}$$

Comme :

$$\lim_{A\to+\infty}\int_x^A \frac{e^{-t^2/2}}{t^2}dt = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{t^2}dt$$

par convergence de l'intégrale avec un test de Riemann et $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\frac{e^{-x^2/2}}{x^3} = \frac{e^{-x^2/2}}{x^3}$ le théorème de prolongement des inégalités nous assure que :

$$\forall x>0,\quad \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{t^2}dt \leq \frac{e^{-x^2/2}}{x^3}$$

Enfin par passage à la limite (légitime) dans (**??**) pour $x>0$:

$$\int_x^A e^{-t^2/2}dt = \frac{e^{-x^2/2}}{x} - \int_x^A \frac{e^{-t^2/2}}{t^2}dt \geq \frac{e^{-x^2/2}}{x} - \frac{e^{-x^2/2}}{x^3} \tag{9}$$

Selon (8) et (9) :

$$\boxed{\forall x>0,\quad e^{-x^2/2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right) \leq \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}dt \leq \frac{e^{-x^2/2}}{x}}$$

2. Notons $Y_n = \max\limits_{1\leq i\leq n}(X_i)$ par suite pour tout réel x :

$$\mathbf{P}([Y_n\leq x]) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}([X_i\leq x]) = (\mathbf{P}([X_1\leq x]))^n$$

et de même :

$$\mathbf{P}([Y_n > x]) = 1-(\mathbf{P}([X_1\leq x]))^n$$

Nous voulons montrer que :

$$\forall \varepsilon>0,\quad \lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\left[\left|\frac{\max\limits_{1\leq i\leq n}(X_i)}{\sqrt{2\ln n}}-1\right|\geq\varepsilon\right]\right) = 0$$

(définition de la converge en probabilité). Or nous avons les égalités événementielles :

$$\begin{aligned}\left[\left|\frac{\max\limits_{1\leq i\leq n}(X_i)}{\sqrt{2\ln n}}-1\right|\geq\varepsilon\right] &= \left[\left|\max_{1\leq i\leq n}(X_i)-\sqrt{2\ln n}\right|\geq\varepsilon\sqrt{2\ln n}\right]\\ &= \left[Y_n-\sqrt{2\ln n}\geq\varepsilon\sqrt{2\ln n}\right]\cup\left[Y_n-\sqrt{2\ln n}\leq-\varepsilon\sqrt{2\ln n}\right]\\ &= \left[Y_n\geq(1+\varepsilon)\sqrt{2\ln n}\right]\cup\left[Y_n\leq(1-\varepsilon)\sqrt{2\ln n}\right]\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\left[Y_n\leq(1-\varepsilon)\sqrt{2\ln n}\right]\right) &= \left(\mathbf{P}\left(\left[X_1\leq(1-\varepsilon)\sqrt{2\ln n}\right]\right)\right)^n\\ &= \left(1-\mathbf{P}\left(\left[X_1>(1-\varepsilon)\sqrt{2\ln n}\right]\right)\right)^n\\ &= \left(1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{(1-\varepsilon)\sqrt{2\ln n}}^{+\infty}e^{-t^2/2}dt\right)^n\\ &\leq \left(1-\frac{e^{-(\ln n)(1-\varepsilon)^2}}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{(1-\varepsilon)\sqrt{2\ln n}}-\frac{1}{\left((1-\varepsilon)\sqrt{2\ln n}\right)^3}\right)\right)^n\\ &\quad\text{selon la question } \mathbf{a.}\end{aligned}$$

Comme :

$$e^{-(\ln n)(1-\varepsilon)^2}=n^{-(1-\varepsilon)^2}$$

alors :

$$\begin{aligned}n\ln\left(1-\frac{e^{-(\ln n)(1-\varepsilon)^2}}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{(1-\varepsilon)\sqrt{2\ln n}}-\frac{1}{\left((1-\varepsilon)\sqrt{2\ln n}\right)^3}\right)\right) &\underset{(n\to+\infty)}{\sim} -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}n^{2\varepsilon-\varepsilon^2}\left(\frac{1}{(1-\varepsilon)\sqrt{2\ln n}}-\frac{1}{\left((1-\varepsilon)\sqrt{2\ln n}\right)^3}\right)\\ &\underset{(n\to+\infty)}{\sim} -\frac{n^{2\varepsilon-\varepsilon^2}}{\sqrt{2\pi}(1-\varepsilon)\sqrt{2\ln n}}\end{aligned}$$

Si $\varepsilon>0$ est assez petit, $\alpha=2\varepsilon-\varepsilon^2>0$, donc $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{2\varepsilon-\varepsilon^2}}{\sqrt{\ln n}}=+\infty$. En reprenant l'exponentielle, on obtient que :

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\left[Y_n\leq(1-\varepsilon)\sqrt{2\ln n}\right]\right)=0$$

Enfin :

$$\mathbf{P}\left(\left[Y_n\geq(1+\varepsilon)\sqrt{2\ln n}\right]\right)=\left(\mathbf{P}\left(\left[X_1\geq(1+\varepsilon)\sqrt{2\ln n}\right]\right)\right)^n=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{(1+\varepsilon)\sqrt{2\ln n}}^{+\infty}e^{-t^2/2}dt\right)^n$$

Donc par la question **1. :**

$$\ln\left(\mathbf{P}\left(\left[Y_n\geq(1+\varepsilon)\sqrt{2\ln n}\right]\right)\right)\leq n\ln\left(\frac{e^{-(\ln n)(1+\varepsilon)^2}}{\sqrt{2\pi}(1+\varepsilon)\sqrt{2\ln n}}\right)=-n(\ln n)(1+\varepsilon)^2-n\ln\left(\sqrt{2\pi}(1+\varepsilon)\sqrt{2\ln n}\right)$$

où la suite majorante tend vers $-\infty$ quand n tend vers l'infini, donc $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\left[Y_n\geq(1+\varepsilon)\sqrt{2\ln n}\right]\right)=0$. Conclusion :

$$\boxed{\frac{\max\limits_{1\leq i\leq n}(X_i)}{\sqrt{2\ln n}}\xrightarrow{\mathbf{P}}1}$$

40 QSP 40

Nous savons que pour toute variable X nous avons $X\leq|X|$ et sachant que X admette un moment d'ordre deux, $|X|$ admet aussi un moment d'ordre deux, donc une espérance avec par croissance de l'intégrale $\mathbf{E}(X)\leq\mathbf{E}(|X|)$ donc $-\mathbf{E}(|X|)\leq-\mathbf{E}(X)$. Par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$, $(\mathbf{E}(|X|))^2\leq(\mathbf{E}(X))^2$ et en additionnant membre à membre $\mathbf{E}(X^2)=\mathbf{E}\left(|X|^2\right)$ cela entraîne que $\mathbf{V}(|X|)\leq\mathbf{V}(X)$ soit encore $\mathbf{V}(Y)\leq\mathbf{V}(X)$.

41 QSP 41

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ par composition de $t \mapsto t - e^t$ continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de exp continue sur $\mathbb{R}$. La positivité de f sur $\mathbb{R}$ ne fait aucun doute. Enfin l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(t - e^t\right) dt$ converge car en posant le changement de variable $u = e^t$ bijectif de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]0, +\infty[$ avec $du = udt$, les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(t - e^t\right) dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^u du$ sont de même nature égales en cas de convergence. Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u} du = \Gamma(1) = 1$ ce qui induit la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(t - e^t\right) dt$ et sa valeur égale à 1 aussi. En conclusion f est bien une densité de probabilité.

42 QSP 42

1. L'astuce est classique en effet il suffit d'écrire que :

$$0 \leq x^2 \mathbf{P}\left([X \geq x]\right) = x^2 \int_x^{+\infty} f(t)\, dt \leq \int_x^{+\infty} t^2 f(t)\, dt$$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_x^{+\infty} t^2 f(t)\, dt = 0$ en tant que reste d'intégrale convergente puisque X^2 admet une espérance. Un petit tour en gendarmerie vous informera que :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} x^2 \mathbf{P}\left([X \geq x]\right) = 0}$$

2. Posons $\psi : A \mapsto \displaystyle\int_0^A t\left(1 - F(t)\right) dt$ définie sur $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. Calculons $\psi(A)$ et appliquons la formule d'intégration par parties aux fonctions $u : t \mapsto 1 - F(t)$ et $v : t \mapsto \frac{t^2}{2}$ toutes deux de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. Nous obtenons donc :

$$\int_0^A t\left(1 - F(t)\right) dt = \left[\tfrac{t^2}{2}\left(1 - F(t)\right)\right]_0^A + \frac{1}{2}\int_0^A t^2 f(t)\, dt = \tfrac{A^2}{2}\left(1 - F(A)\right) + \frac{1}{2}\int_0^A t^2 f(t)\, dt \quad (10)$$

Or $\lim\limits_{A \to +\infty} \displaystyle\int_0^A t^2 f(t)\, dt = \mathbf{E}\left(X^2\right)$ puisque X est une variable positive admettant un moment d'ordre deux et d'autre part d'après la question précédente $\lim\limits_{A \to +\infty} A^2\left(1 - F(A)\right) = 0$.
Par passage à la limite dans l'égalité (10), on obtient donc que l'intégrale converge et vaut :

$$\boxed{\lim_{A \to +\infty} \int_0^A x\left(1 - F(x)\right) dx = \int_0^{+\infty} x\mathbf{P}\left([X \geq x]\right) dx = \frac{1}{2}\mathbf{E}\left(X^2\right)}$$

3. Dans la QSP **37** nous avons vu que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbf{P}\left([X \geq x]\right) dx = \mathbf{E}(X)$ ainsi l'inégalité proposée est $\left(\mathbf{E}(X)\right)^2 \leq \mathbf{E}\left(X^2\right)$ ce qui toujours vrai puisque $\mathbf{V}(X) \geq 0$. Ainsi :

$$\boxed{\left(\int_0^{+\infty} \mathbf{P}\left([X \geq x]\right) dx\right)^2 \leq 2\int_0^{+\infty} x\mathbf{P}\left([X \geq x]\right) dx}$$

43 QSP 43

Posons $\varphi : a \mapsto \displaystyle\int_0^a \left(1 - \Phi(t)\right)^2 dt$ définie sur $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. Calculons $\varphi(a)$ et appliquons la formule d'intégration par parties aux fonctions $u : t \mapsto \left(1 - \Phi(t)\right)^2$ et $v : t \mapsto t$ toutes deux de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. Nous obtenons donc :

$$\int_0^a \left(1 - \Phi(t)\right)^2 dt = \left[t\left(1 - \Phi(t)\right)^2\right]_0^a + 2\int_0^a t\left(1 - \Phi(t)\right) dt = a\left(1 - \Phi(a)\right)^2 + 2\int_0^a t\left(1 - \Phi(t)\right) dt \quad (11)$$

Pour effectuer la limite nous supposerons que $a > 1$ ce qui nous permettra de majorer $a\left(1-\Phi\left(a\right)\right)^2$ par $\left(a\left(1-\Phi\left(a\right)\right)\right)^2$ qui vaut $\left(a\mathbf{P}\left(\left[X \geq a\right]\right)\right)^2$ soit encore $\left(a\int_a^{+\infty} f\left(t\right)dt\right)^2$ qui est majoré par $\left(\int_a^{+\infty} tf\left(t\right)dt\right)^2$ de limite nulle puisque X admet une espérance et l'intégrale représente le reste de l'intégrale convergente donnant la valeur de l'intégrale. D'autre part nous avons vu à la QSP **41** que :

$$\lim_{a\to+\infty}\int_0^a t\left(1-\Phi\left(t\right)\right)dt = \int_0^{+\infty} x\mathbf{P}\left(\left[X \geq x\right]\right)dx = \frac{1}{2}\mathbf{E}\left(X^2\right)$$

Par passage à la limite dans l'égalité (11) on obtient donc que l'intégrale I converge et vaut :

$$\boxed{I = \mathbf{E}\left(X^2\right) = 1}$$

44 QSP 44

1. Déterminer la loi conditionnelle de S sachant $\left[N = n\right]$, c'est déterminer la loi de $X_1 + \cdots + X_n$. Par stabilité de la loi grand gamma pour la somme de variables indépendantes,

$$\boxed{S \hookrightarrow \Gamma\left(\frac{1}{\lambda}, n\right)}$$

puisque pour chaque $k \in \{1, \ldots, n\}$, $X_k \hookrightarrow \Gamma\left(\frac{1}{\lambda}, 1\right)$.

2. Notons F_S la fonction de répartition de S définie sur $\mathbb{R}$ par $F_S\left(x\right) = \mathbf{P}\left(\left[S \leq x\right]\right)$. Par la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $\left(\left[N = n\right]\right)_{n\geq 1}$ il vient :

$$\begin{aligned}
F_S\left(x\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}_{[N=n]}\left(\left[S \leq x\right]\right)\mathbf{P}\left(\left[N = n\right]\right)\\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \lambda p \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x \frac{\left(\lambda\left(1-p\right)t\right)^{n-1}e^{-\lambda t}}{(n-1)!}dt & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}\\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \lambda p \displaystyle\int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\lambda\left(1-p\right)t\right)^{n-1}e^{-\lambda t}}{(n-1)!}dt & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}\\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \lambda p \displaystyle\int_0^x e^{-\lambda t}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\lambda\left(1-p\right)t\right)^{n-1}}{(n-1)!}dt & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}\\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \displaystyle\int_0^x \lambda p e^{-\lambda t}e^{\lambda(1-p)t}dt & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}\\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \displaystyle\int_0^x \lambda p e^{-\lambda p t}dt & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}\\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 - e^{-p\lambda x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{S \hookrightarrow \varepsilon\left(\lambda p\right)}$$

Enfin comme $\mathbf{E}\left(N\right) = \frac{1}{p}$ et $\mathbf{E}\left(X_1\right) = \frac{1}{\lambda}$ alors :

$$\boxed{\mathbf{E}\left(N\right)\mathbf{E}\left(X_1\right) = \frac{1}{\lambda p} = \mathbf{E}\left(S\right)}$$

45 QSP 45

1. Vous savez parfaitement, du moins je l'espère, que toute fonction de répartition de variable à densité est de classe $\mathcal{C}^1$ là où la densité associée est continue. Or ici f la densité commune aux vairables X_i est continue sur $\mathbb{R}$, donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et y strictement monotone croissante puisque f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi comme il est de notoriété presque publique que U_n est une variable à denisté, par théorème de composition :

$$\boxed{V_n \text{ est une variable aléatoire à densité}}$$

2. Nous avons vu la question de multiple fois, donc j'irai vite :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = 1 - (1 - F(x))^n}$$

3. Par définition ψ est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \mathbf{P}([V_n \leq x]) \\
&= \mathbf{P}([F(U_n) \leq x]) \\
&= \mathbf{P}\left(\left[U_n \leq F^{-1}(x)\right]\right) \\
&\quad \text{puisque } F \text{ réalise une bijection croissante sur } \mathbb{R} \\
&= \varphi\left(F^{-1}(x)\right) \\
&= 1 - \left(1 - F\left(F^{-1}(x)\right)\right)^n \\
&= 1 - (1 - x)^n
\end{aligned}$$

$$\boxed{\psi = 1 - (1 - \mathrm{Id})^n}$$

46 QSP 46

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur $\{0, n\}$ par :

$$\mathbf{P}([X_n = 0]) = 1 - \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}([X_n = n]) = \frac{1}{n}$$

Nous avons pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([|X_n - 0| > \varepsilon]) &= \mathbf{P}([|X_n| > \varepsilon]) \\
&= \mathbf{P}([X_n > \varepsilon]) \\
&\quad \text{car } X_n \text{ est une variable positive} \\
&= 1 - \mathbf{P}([X_n = 0]) \\
&= \frac{1}{n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

et donc :

$$\boxed{(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0 \text{ alors que } \mathbf{E}(X_n) = 1 \neq 0 \text{ et } \mathbf{V}(X_n) = n - 1 \text{ qui tend vers } +\infty}$$

47 QSP 47

1. La variable $\frac{1}{X}$ admet une espérance si et seulement si la série de terme général positif $\frac{1}{k}\mathbf{P}([X = k])$ est convergente. Or :

$$0 \leq \frac{1}{k}\mathbf{P}([X = k]) \leq \mathbf{P}([X = k])$$

où la série $\sum_{k\geq 0} \mathbf{P}([X = k])$ converge (par axiome de $\sigma-$additivité). Le critère de comparaison permet de conclure que la série $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{k}\mathbf{P}([X = k])$ converge, autrement dit :

$$\boxed{\frac{1}{X} \text{ admet une espérance}}$$

2. La variable aléatoire $\left(t\sqrt{X}+\dfrac{1}{\sqrt{X}}\right)^2 = 2t + Xt^2 + \dfrac{1}{X}$ s'exprime comme combinaison linéaire de variables admettant chacune une espérance. Ainsi :

$$\boxed{\text{La variable } \left(t\sqrt{X}+\frac{1}{\sqrt{X}}\right)^2 \text{ admet une espérance}}$$

3. Par positivité de l'espérance nous permet de dire que $\mathbf{E}\left(\left(t\sqrt{X}+\dfrac{1}{\sqrt{X}}\right)^2\right)$ est positive. Par linéarité on obtient la fonction polynomiale de degré deux positive :

$$t \mapsto P(t) = t^2\mathbf{E}(X) + 2t + \mathbf{E}\left(\frac{1}{X}\right)$$

Elle admet donc un discriminant réduit négatif ou nul de valeur $\Delta' = 1 - \mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}\left(\frac{1}{X}\right)$ autrement dit :

$$\boxed{\mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}\left(\frac{1}{X}\right) \geq 1}$$

Lorsque ce discriminant est nul, P admet une racine double $t = -\dfrac{1}{\mathbf{E}(X)}$ qui rend l'espérance de $\left(t\sqrt{X}+\dfrac{1}{\sqrt{X}}\right)^2$ nulle. Ainsi, ce que l'on a vu de multiple fois, la variable $-\dfrac{1}{\mathbf{E}(X)}\sqrt{X}+\dfrac{1}{\sqrt{X}}$ est presque surement nulle, ce qui revient à dire que $X = \mathbf{E}(X)$ presque surement ce qui est la définition d'une variable quasi-certaine. La réciproque est triviale, à savoir si X est quasiment certaine alors $\mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}\left(\dfrac{1}{X}\right) = 1$ En conclusion :

$$\boxed{\text{Le cas d'égalité est obtenu si, et seulement si } X \text{ est une variable quasi-certaine}}$$

48 QSP 48

Notons X la variable suivant la loi de Poisson de paramètre 4. Etudions les variations de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \mathbf{P}([X=n])$. Pour cela calculons le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_u}$ que l'on comparera à 1. Nous avons après simplifications :

$$\frac{\dfrac{e^{-4}4^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{e^{-4}4^n}{n!}} = \frac{4}{(n+1)!}n! = \frac{4}{n+1}$$

Ainsi nous avons les équivalences successives suivantes :

$$\left(\frac{u_{n+1}}{u_u} \geq 1\right) \Longleftrightarrow \left(\frac{4}{n+1} \geq 1\right) \Longleftrightarrow (n \leq 3)$$

Ainsi nous avons

$$\mathbf{P}([X=0]) < \mathbf{P}([X=1]) < \mathbf{P}([X=2]) < \mathbf{P}([X=3]) = \mathbf{P}([X=4]) > \mathbf{P}([X=5]) > \cdots$$

En conclusion :

$$\boxed{\text{La distribution est bimodale de modes 3 et 4}}$$

49 QSP 49

Tout d'abord $X(\Omega) = [\![n, 2n]\!]$. Calculons pour tout i de $X(\Omega)$, $\mathbf{P}([X=i])$. Rappelons que l'événement $[X=i]$ est réalisé si et seulement si la $n^{\text{ème}}$ et dernière boule blanche est arrivée lors du $i^{\text{ème}}$ tirage. Un tirage favorable sera caractérisé par le placement des $n-1$ premières boules blanches lors des $i-1$

premiers lancers, alors qu'un tirage quelconque (ce qui donnera $|\Omega|$) sera caractérisé par l'emplacement des n boules blanches parmi les $2n$ places disponibles. Ainsi :

$$\boxed{\forall i \in [\![n, 2n]\!], \quad \mathbf{P}([X=i]) = \frac{\binom{i-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}}}$$

Comme X est une variable finie elle admet des moments de tous ordres, en particulier une espérance qui vaut par définition :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X) &= \sum_{i=n}^{2n} i \frac{\binom{i-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}} \\
&= \frac{1}{\binom{2n}{n}} \sum_{i=n}^{2n} n \binom{i}{n} \\
&\quad \text{par propriété des coefficients binomiaux} \\
&= \frac{n}{\binom{2n}{n}} \sum_{i=n}^{2n} \binom{i}{n} \\
&= \frac{n\binom{2n+1}{n+1}}{\binom{2n}{n}} \\
&\quad \text{par "TPG"} \\
&= \frac{n\frac{2n+1}{n+1}\binom{2n}{n}}{\binom{2n}{n}} \\
&\quad \text{par propriété des coefficients binomiaux}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{E}(X) = \frac{n(2n+1)}{n+1}}$$

50 QSP 50

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définie pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$\forall n \geq 1, \quad X_n(\Omega) = \{0, n\}, \quad \mathbf{P}([X_n = 0]) = 1 - \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}([X_n = n]) = \frac{1}{n}$$

Vous n'aurez pas de mal à vous convaincre que $(X_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ alors que pour tout $n \geq 1$, $\mathbf{E}(X_n) = 1$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{E}(X_n) = 1 \neq 0$.

51 QSP 51

Soit F_X (respectivement F_{X^2}) la fonction de répartition de X (respectivement de X^2). Par définition $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ avec $F_X(x) = \mathbf{P}([X \leq x])$ et :

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \left\{\begin{array}{ll} \mathbf{P}\left(\left[X^2 \leq x^2\right]\right) & \text{si} \quad x \geq 0 \\ \mathbf{P}\left(\left[X^2 \geq x^2\right]\right) & \text{si} \quad x < 0 \end{array}\right. \\
&= \left\{\begin{array}{ll} \mathbf{P}\left(\left[X^2 \leq x^2\right]\right) & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 1 - \mathbf{P}\left(\left[X^2 < x^2\right]\right) & \text{si} \quad x < 0 \end{array}\right. \\
&= \left\{\begin{array}{ll} \mathbf{P}\left(\left[X^2 \leq x^2\right]\right) & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 1 - \mathbf{P}\left(\left[X^2 \leq x^2\right]\right) & \text{si} \quad x < 0 \end{array}\right. \\
&= \left\{\begin{array}{ll} 1 - e^{-\lambda x^2} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 1 - \left(1 - e^{-\lambda x^2}\right) & \text{si} \quad x < 0 \end{array}\right. \\
&= \left\{\begin{array}{ll} 1 - e^{-\lambda x^2} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ e^{-\lambda x^2} & \text{si} \quad x < 0 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Je vous laisse vérifier les classes de F_X pour conclure que X est une variable à densité dont une densité f est obtenue par dérivation de F_X sur $\mathbb{R}^*$ et en complétant sa définition en posant, par exemple, $f(0) = 0$ ce qui donne :

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} 2\lambda x e^{-\lambda x^2} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -2\lambda x e^{-\lambda x^2} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}}$$

Nous remarquons bien que f est paire.

52 QSP 52

Pour A fixé dans $\mathbb{R}_+$, intégrons par parties $\displaystyle\int_0^A (1 - F(x) - F(-x))\,dx$ en posant $u(x) = 1 - F(x) - F(-x)$ et $v(x) = x$ où u et v (somme et commposée) sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. Il va sans dire que $u'(x) = -f(x) + f(-x)$ et que $v'(x) = 1$. Appliquons la formule ...

$$\begin{aligned}
\int_0^A (1 - F(x) - F(-x))\,dx &= [x(1 - F(x) - F(-x))]_0^A - \int_0^A x(-f(x) + f(-x))\,dx \\
&= A(1 - F(A) - F(-A)) - \int_0^A x(-f(x) + f(-x))\,dx \\
&= A(1 - F(A) - F(-A)) + \int_0^A xf(x)\,dx - \int_0^A xf(-x)\,dx \\
&= A(1 - F(A) - F(-A)) + \int_0^A xf(x)\,dx - \int_0^{-A} tf(t)\,dt \\
&\quad \text{en posant le changement affine } t = -x \\
&= A(1 - F(A) - F(-A)) + \int_0^A xf(x)\,dx + \int_{-A}^0 tf(t)\,dt
\end{aligned}$$

Faisons tendre A vers $+\infty$, nous avons :

- $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} A(1 - F(A) - F(-A)) = 0$ par hypothèse de l'énoncé,
- $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \int_0^A xf(x)\,dx = \int_0^{+\infty} xf(x)\,dx$ car X admet une espérance,
- $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^0 xf(x)\,dx = \int_{-\infty}^0 xf(x)\,dx$ pour les mêmes raisons.

Nous pouvons donc conclure que $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \int_0^A (1 - F(x) - F(-x))\,dx$ existe et est finie égale à :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} (1 - F(x) - F(-x))\,dx = 0 + \int_0^{+\infty} xf(x)\,dx + \int_{-\infty}^0 xf(x)\,dx = \mathbf{E}(X)}$$

53 QSP 53

Considérons une variable X normale centrée et réduite et une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ définie par $\forall n \geq 0$, $X_n = -X$. Vous savez très bien qu'une variable normale centrée et réduite est une variable symétrique par parité d'une de ses densités. Par suite pour tout $n \geq 1$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ et la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers X. En revanche $X_n - X = -2X$ ne dépend pas de l'entier naturel n et n'est pas nulle, donc $(X_n - X)_{n \geq 1}$ ne converge pas en loi vers 0 !

54 QSP 54

L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous informe que :

$$\left(\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\psi(t)\,dt\right)^2 \leq \left(\int_0^{+\infty} (\varphi(t))^2\,dt\right)\left(\int_0^{+\infty} (\psi(t))^2\,dt\right)^2$$

Appliquons l'inégalité aux fonctions $\varphi : t \mapsto \sqrt{tf(t)}$ et $\psi : t \mapsto \sqrt{\dfrac{f(t)}{t}}$ ce qui donne :

$$\left(\int_0^{+\infty} f(t)\,dt\right)^2 \leq \left(\int_0^{+\infty} tf(t)\,dt\right)\left(\int_0^{+\infty} \tfrac{f(t)}{t}dt\right)^2$$

soit encore par application du théorème de transfert vu que la variable X est strictement positive :

$$1 \leq \mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}\left(\frac{1}{X}\right)$$

Conclusion :

$$\boxed{\frac{1}{\mathbf{E}(X)} \leq \mathbf{E}\left(\frac{1}{X}\right)}$$

55 QSP 55

1. Le théorème de comparaison appliqué dans le cas positif va nous permettre de conclure favorablement. En effet pour tout réel positif x :

$$0 \leq xf_X(x) \leq \left(x + \frac{1}{x}\right) f_X(x)$$

sans oublier de préciser que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(x + \frac{1}{x}\right) f_X(x)\,dx$ converge par hypothèse (utilisation du théorème de transfert appliquée à la fonction $\varphi : x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$ contenant $X(\Omega)$).

2. La réciproque est fausse, en effet il suffit de prendre le contre–exemple d'une variable X uniforme sur $]0,1[$. Dans ce cas la variable $X + \dfrac{1}{X}$ prend presque surement ses valeurs dans l'intervalle ouvert $]2, +\infty[$ et l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \left(x + \frac{1}{x}\right) dx$ diverge !

56 QSP 56

1. Montrer que pour tout entier $n > \lambda - 1$, on a :

$$\mathbf{P}([X \geq n]) \leq \mathbf{P}([X = n]) \times \frac{n+1}{n+1-\lambda}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([X \geq n]) &= \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbf{P}([X = k]) \\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k-n+n}}{k!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{n!\lambda^{k-n}}{k!} \\
&= \lim_{N\to+\infty} \mathbf{P}([X = n]) \sum_{k=n}^{N} \frac{n!\lambda^{k-n}}{k!}
\end{aligned}$$

Pour chaque entier naturel k de l'ensemble $\{n, \ldots, N\}$ nous avons :

$$\frac{n!}{k!} = \frac{1}{(n+1)\times\cdots\times k} \leq \frac{1}{(n+1)^{k-n}}$$

dès lors :

$$\sum_{k=n}^{N}\frac{n!\lambda^{k-n}}{k!}\leq\sum_{k=n}^{N}\frac{\lambda^{k-n}}{(n+1)^{k-n}}=\sum_{k=n}^{N}\left(\frac{\lambda}{n+1}\right)^{k-n}=\sum_{k=0}^{N-n}\left(\frac{\lambda}{n+1}\right)^{k}\leq\frac{1}{1-\frac{\lambda}{n+1}}=\frac{n+1}{n+1-\lambda}$$

Par théorème de prolongement des inégalités d'emploi licite, puisque les limites existent :

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}\sum_{k=n}^{N}\frac{n!\lambda^{k-n}}{k!}\leq\mathbf{P}([X=n])\left(\frac{n+1}{n+1-\lambda}\right)$$

soit encore :

$$\boxed{\forall n>\lambda-1,\quad \mathbf{P}([X\geq n])\leq\mathbf{P}([X=n])\times\frac{n+1}{n+1-\lambda}}$$

2. En revenant à la caractérisation de l'équivalence, montrons que :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathbf{P}([X\geq n])}{\mathbf{P}([X=n])}=1$$

Procédons par encadrement ... Nous avons d'une part :

$$\frac{\mathbf{P}([X\geq n])}{\mathbf{P}([X=n])}=\frac{\mathbf{P}([X=n])+\mathbf{P}([X>n])}{\mathbf{P}([X=n])}\geq 1$$

et d'autre part d'après la question précédente :

$$\frac{\mathbf{P}([X\geq n])}{\mathbf{P}([X=n])}\leq\frac{n+1}{n+1-\lambda}$$

avec :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n+1-\lambda}=1$$

Je vous laisse conclure ...

$$\boxed{\mathbf{P}([X\geq n])\underset{n\to+\infty}{\sim}\mathbf{P}([X=n])}$$

3. La caractérisation de la négligeabilité sera encore notre tactique imparable. Nous avons :

$$0\leq\frac{\mathbf{P}([X>n])}{\mathbf{P}([X=n])}=\frac{\mathbf{P}([X\geq n])-\mathbf{P}([X=n])}{\mathbf{P}([X=n])}\leq\frac{n+1}{n+1-\lambda}-1=\frac{\lambda}{n-\lambda+1}$$

Je vous laisse faire votre petit tour en gendarmerie et après présentation de votre démonstration on vous laissera affirmer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathbf{P}([X>n])}{\mathbf{P}([X=n])}=0$$

Autrement dit :

$$\boxed{\mathbf{P}([X>n])=o\left(\mathbf{P}([X=n])\right)\text{ lorsque } n \text{ tend vers l'infini}}$$

57 QSP 57

1. Tout d'abord Z prend ses vaeurs dans $\mathbb{N}$. Selon la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $\{[Y=1],[Y=2]\}$ nous obtenons pour chaque entier naturel k et par indépendance des variables X et Y :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([Z=k]) &= \mathbf{P}([Z=k]\cap[Y=1])+\mathbf{P}([Z=k]\cap[Y=2])\\ &= \mathbf{P}([XY=k]\cap[Y=1])+\mathbf{P}([XY=k]\cap[Y=2])\\ &= \mathbf{P}([X=k]\cap[Y=1])+\mathbf{P}([2X=k]\cap[Y=2])\\ &= \mathbf{P}([X=k])\,\mathbf{P}([Y=1])+\mathbf{P}([2X=k])\,\mathbf{P}([Y=2])\end{aligned}$$

A ce niveau-là, discutons selon la parité de l'entier k.

– Si k est un entier pair que nous poserons égal à $2i$ ($i \in \mathbb{N}$) nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([Z = 2i]) &= \mathbf{P}([X = 2i])\,\mathbf{P}([Y = 1]) + \mathbf{P}([2X = 2i])\,\mathbf{P}([Y = 2]) \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathbf{P}([X = 2i]) + \mathbf{P}([X = i])\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^{2i}}{(2i)!} + \frac{e^{-\lambda}\lambda^{i}}{i!}\right)
\end{aligned}$$

– Si k est un entier impair que nous poserons égal à $2j+1$ ($j \in \mathbb{N}$) nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([Z = 2j+1]) &= \mathbf{P}([X = 2j+1])\,\mathbf{P}([Y = 1]) + \mathbf{P}([2X = 2j+1])\,\mathbf{P}([Y = 2]) \\
&= \frac{1}{2}\mathbf{P}([X = 2j+1]) \\
&= \frac{e^{-\lambda}\lambda^{2j+1}}{2\,(2j+1)!}
\end{aligned}$$

2. Nous avons :

$$\mathbf{P}([Z \in 2\mathbb{N}]) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^{2i}}{(2i)!} + \frac{e^{-\lambda}\lambda^{i}}{i!}\right)$$

Nous avons déjà rencontrer la somme des termes de rang pair dans l'exercice **2** de la fiche **2**, je n'y reviendrai donc pas ...

$$\boxed{\mathbf{P}([Z \in 2\mathbb{N}]) = \frac{1}{2}\left(\frac{1+e^{-2\lambda}}{2} + 1\right) = \frac{3+e^{-2\lambda}}{4}}$$

58 QSP 58

Cette exercice **à connaître par coeur** surtout au moment de passer vos **oraux**, va se résoudre en utilisant la ruse du siècle permettant d'écrire une variable au plus binaire à l'aide de **variables indicatrices**, en ayant précisé que la tribu engendrée par X sera $\mathcal{A}_X = \left\{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\right\}$ et celle engendrée par Y sera $\mathcal{A}_Y = \left\{\emptyset, B, \overline{B}, \Omega\right\}$ où A (resp et/ou B) peut être vide. On rappelle à ce propos que :

> On appelle ***tribu associée à X***, *notée* $\mathcal{A}_X$, *la tribu engendrée par le système complet d'événements* $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$. *Autrement dit :*
>
> $$\mathcal{A}_X = \underbrace{\sigma\Big(([X = x])_{x \in X(\Omega)}\Big)}_{\text{notation de tribu engendrée par } X} = \left\{\biguplus_{x \in A}[X = x] \mid A \subset X(\Omega)\right\}$$

La variable X où $A = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = a\}$ s'écrit donc :

$$\begin{aligned}
X &= a\mathbf{1}_A + b\mathbf{1}_{\overline{A}} \\
&= a\mathbf{1}_A + b(1 - \mathbf{1}_A) \\
&= (a-b)\,\mathbf{1}_A + b \\
&= \alpha\mathbf{1}_A + b \\
\text{en posant } \alpha &= a - b
\end{aligned}$$

et de même $Y = \beta\mathbf{1}_B + c$. Dès lors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathrm{Cov}(\alpha\mathbf{1}_A + b, \beta\mathbf{1}_B + c) \\
&= \alpha\beta\,\mathrm{Cov}(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B) \\
&\quad \text{par propriété de la covariance} \\
&= \alpha\beta\left(\mathbf{E}(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B) - \mathbf{E}(\mathbf{1}_A)\,\mathbf{E}(\mathbf{1}_B)\right) \\
&\quad \text{par propriété de la covariance} \\
&= \alpha\beta\left(\mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)\right)
\end{aligned}$$

D'où l'équivalence :

$$(\mathrm{Cov}\,(X,Y)=0) \iff (\alpha=0 \quad \text{ou} \quad \beta=0 \quad \text{ou} \quad \mathbf{P}\,(A\cap B)=\mathbf{P}\,(A)\,\mathbf{P}\,(B))$$

Comme toute variable quasi-certaine ou de Dirac (cas où α ou β nuls) est indépendante de toute variable aléatoire et que lorsque α et β sont non nuls, l'indépendance de X et Y équivaut à celle de A et B, on a bien l'équivalence demandée.

59 QSP 59

Par hypothèse nous savons que :

$$\mathbf{P}\,(A\cap B\cap C)=\mathbf{P}\,(A)\,\mathbf{P}\,(B\cap C)=\mathbf{P}\,(B)\,\mathbf{P}\,(C\cap A)=\mathbf{P}\,(C)\,\mathbf{P}\,(A\cap B)$$

Ainsi en divisant membre à membre par le produit de réels $\mathbf{P}\,(A)\,\mathbf{P}\,(B)\,\mathbf{P}\,(C)$ non nul, il vient :

$$\frac{\mathbf{P}\,(A\cap B\cap C)}{\mathbf{P}\,(A)\,\mathbf{P}\,(B)\,\mathbf{P}\,(C)}=\frac{\mathbf{P}\,(A)\,\mathbf{P}\,(B\cap C)}{\mathbf{P}\,(A)\,\mathbf{P}\,(B)\,\mathbf{P}\,(C)}=\frac{\mathbf{P}\,(B)\,\mathbf{P}\,(C\cap A)}{\mathbf{P}\,(A)\,\mathbf{P}\,(B)\,\mathbf{P}\,(C)}=\frac{\mathbf{P}\,(C)\,\mathbf{P}\,(A\cap B)}{\mathbf{P}\,(A)\,\mathbf{P}\,(B)\,\mathbf{P}\,(C)}$$

soit encore :

$$\frac{\mathbf{P}\,(A\cap B\cap C)}{\mathbf{P}\,(A)\,\mathbf{P}\,(B)\,\mathbf{P}\,(C)}=\frac{\mathbf{P}\,(B\cap C)}{\mathbf{P}\,(B)\,\mathbf{P}\,(C)}=\frac{\mathbf{P}\,(C\cap A)}{\mathbf{P}\,(A)\,\mathbf{P}\,(C)}=\frac{\mathbf{P}\,(A\cap B)}{\mathbf{P}\,(A)\,\mathbf{P}\,(B)}$$

N'oublions pas que A est indépendant de $B\cup C$ ce qui se traduit par définition par :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\,(A\cap(B\cup C)) &= \mathbf{P}\,(A)\,\mathbf{P}\,(B\cup C)\\
&= \mathbf{P}\,(A)\,(\mathbf{P}\,(B)+\mathbf{P}\,(C)-\mathbf{P}\,(B\cap C))\\
&= \mathbf{P}\,(A)\,\mathbf{P}\,(B)+\mathbf{P}\,(A)\,\mathbf{P}\,(C)-\mathbf{P}\,(A)\,\mathbf{P}\,(B\cap C)
\end{aligned}$$

d'autre part :

$$\mathbf{P}\,(A\cap(B\cup C))=\mathbf{P}\,((A\cap B)\cup(A\cap C))=\mathbf{P}\,(A\cap B)+\mathbf{P}\,(A\cap C)-\mathbf{P}\,(A\cap B\cap C)$$

En notant k d'une part la valeur commune des rapports présents deux inégalités au-dessus, et en combinant les deux derniers résultats de l'autre :

$$\mathbf{P}\,(A)\,\mathbf{P}\,(B)+\mathbf{P}\,(A)\,\mathbf{P}\,(C)-\mathbf{P}\,(A)\,\mathbf{P}\,(B\cap C)=k\mathbf{P}\,(A)\,\mathbf{P}\,(B)+k\mathbf{P}\,(A)\,\mathbf{P}\,(C)-\mathbf{P}\,(A\cap B\cap C)$$

et par simplifications :

$$(k-1)\,(\mathbf{P}\,(A)\,\mathbf{P}\,(B)+\mathbf{P}\,(A)\,\mathbf{P}\,(C))=0$$

Comme $\mathbf{P}\,(A)\,\mathbf{P}\,(B)+\mathbf{P}\,(A)\,\mathbf{P}\,(C)$ est non nul (somme et produit de termes strictement positifs) il vient que :

$$k=1$$

et ainsi :

$$\left\{\begin{array}{l}
\mathbf{P}\,(A\cap B\cap C)=\mathbf{P}\,(A)\,\mathbf{P}\,(B)\,\mathbf{P}\,(C)\\
\mathbf{P}\,(B\cap C)=\mathbf{P}\,(B)\,\mathbf{P}\,(C)\\
\mathbf{P}\,(A\cap C)=\mathbf{P}\,(A)\,\mathbf{P}\,(C)\\
\mathbf{P}\,(A\cap B)=\mathbf{P}\,(A)\,\mathbf{P}\,(B)
\end{array}\right.$$

ce qui est la définition de :

$$\boxed{\text{Les événements } A,\ B,\ C \text{ sont mutuellement indépendants}}$$

60 QSP 60

Supposons que $\mathbf{E}(|X|) = 0$. Pour tout $t > 0$, on a, d'après l'inégalité de Markov :

$$\mathbf{P}([|X| \geq t]) \leq \frac{\mathbf{E}(|X|)}{t} = 0$$

Or :

$$[|X| > 0] = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[|X| \geq \frac{1}{n}\right]$$

d'où par l'inégalité de Boole (hors de programme, donc à démontrer) :

$$0 \leq \mathbf{P}([|X| > 0]) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}\left(\left[|X| \geq \frac{1}{n}\right]\right) = 0$$

Nous avons donc démontré l'implication :

$$\boxed{(\mathbf{E}(|X|) = 0) \quad \Longrightarrow \quad (X = 0 \text{ p.s.})}$$

61 QSP 61

La question est classique et l'on va utiliser la caractérisation classique de la négligeabilité sachant que :

$$\left(\mathbf{P}([|X| \geq n]) = \underset{n\to\infty}{o}(1/n^r)\right) \iff \left(\lim_{n\to\infty} n^r \mathbf{P}([|X| \geq n]) = 0\right)$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}
0 \leq n^r \mathbf{P}([|X| \geq n]) &\leq n^r (\mathbf{P}([X \geq n]) + \mathbf{P}([X \leq -n])) \\
&\leq n^r \Big(\sum_{\begin{cases} x_k \in X(\Omega) \\ x_k \geq n \end{cases}} \mathbf{P}([X = x_k]) + \sum_{\begin{cases} x_k \in X(\Omega) \\ x_k \leq -n \end{cases}} \mathbf{P}([X = x_k]) \Big) \\
&\leq n^r \sum_{\begin{cases} x_k \in X(\Omega) \\ |x_k| \geq n \end{cases}} \mathbf{P}([X = x_k]) \\
&\leq \sum_{\begin{cases} x_k \in X(\Omega) \\ |x_k| \geq n \end{cases}} |x_k|^r \mathbf{P}([X = x_k])
\end{aligned}$$

Comme $\mathbf{E}(|X|^r) < +\infty$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{\begin{cases} x_k \in X(\Omega) \\ |x_k| \geq n \end{cases}} |x_k|^r \mathbf{P}([X = x_k]) = 0$ (limite du reste d'une série convergente) et par encadrement :

$$\lim_{n\to\infty} n^r \mathbf{P}([|X| \geq n]) = 0$$

Autrement dit :

$$\boxed{\mathbf{P}([|X| \geq n]) = o(1/n^r) \text{ lorsque } n \text{ tend vers } +\infty}$$

62 QSP 62

On peut sans nuire à la généralité, supposer que les deux variables X et Y sont centrées, alors $X + Y$ et $X - Y$ le sont aussi et l'on a :

$$\operatorname{Cov}(X+Y, X-Y) = \mathbf{E}((X+Y)(X-Y)) = \mathbf{E}\left(X^2 - Y^2\right) = \mathbf{E}\left(X^2\right) - \mathbf{E}\left(Y^2\right) = \mathbf{V}(X) - \mathbf{V}(Y) = 0$$

En conclusion, les variables aléatoires $X + Y$ et $X - Y$ sont non corrélées.

63 QSP 63

Réponse succinte en rappelant que le produit de convolution de deux fonctions f et g se note officiellement $f * g$.

Je vous laisse convoler pour vérifier que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f_{X+Y}(x) = (1-|1-x|)\,\mathbf{1}_{[0,2]}(x)$$
$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f_{X+Y+Z}(x) = \left(\frac{x^2}{2}\right)\mathbf{1}_{[0,1]}(x) + \left(\frac{3}{4} - \left(x-\frac{3}{2}\right)^2\right)\mathbf{1}_{[1,2]}(x) + \frac{(x-3)^2}{2}\mathbf{1}_{[2,3]}(x)$$
$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f_{X-Y}(x) = (1-|x|)\,\mathbf{1}_{[-1,1]}(x)$$

64 QSP 64

Le support de Z_n est $[0,n]$ presque surement. Pour n suffisamment grand tel que $n \geq x > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([Z_n > x]) &= \mathbf{P}\left(\left[\inf(U_1,\dots,U_n) > \frac{x}{n}\right]\right)\\
&= \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}\left[U_k > \frac{x}{n}\right]\right)\\
&= \left(\mathbf{P}\left(\left[U_1 > \frac{x}{n}\right]\right)\right)^n\\
&= \left(1-\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n\\
&= \exp\left(n\ln\left(1-\left(\frac{x}{n}\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

Cette dernière expression tend vers e^{-x} lorsque n tend vers l'infini. Dès lors :

$$\boxed{(Z_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} E \hookrightarrow \varepsilon(1)}$$

65 QSP 65

L'exercice a quasiment été traité dans la fiche dédiée à la convergence de suites de variables extrêmes, donc j'irai vite ...

1. La suite $(A_n)_n$ converge en loi vers une variable **exponentielle** de paramètre 1.
2. La loi limite est la loi de **Weibull**, dont la fonction d'antirépartition (ou de survie) est donnée par $x \longmapsto e^{-\left(x^{\lambda}\right)}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x)$.
3. La loi limite est la loi de **Fréchet,** dont la fonction d'antirépartition est donnée par $x \longmapsto e^{-\left(x^{-\lambda}\right)}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x)$.
4. La loi limite est la loi de **Weibull**, dont la fonction de répartition est donnée par $x \longmapsto e^{-\left(e^{-x}\right)}$ $(x \in \mathbb{R})$.

66 QSP 66

Pour commencer posons pour tout entier naturel non nul n, $Z_n = \dfrac{1}{n}\sup(X_1,\dots,X_n)$ qui est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Pour $x > 0$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([Z_n \leq x]) &= \mathbf{P}([\sup(X_1,\dots,X_n) \leq nx])\\
&= \prod_{k=1}^{n}\mathbf{P}([X_k \leq nx])\\
&= (\mathbf{P}([X \leq nx]))^n\\
&\quad \text{puisque les variables } X_k \text{ sont i.i.d.}\\
&= (1-\mathbf{P}([X > nx]))^n\\
&= \exp(n\ln(1-\mathbf{P}([X > nx])))
\end{aligned}$$

Lorsque n tend vers l'infini, il en est de même de nx, ainsi :

$$\ln\left(\mathbf{P}\left([Z_n \leq x]\right)\right) = n\ln\left(1 - o\left(\frac{1}{nx}\right)\right)$$

Ainsi :

$$\ln\left(\mathbf{P}\left([Z_n \leq x]\right)\right) \underset{n\to\infty}{\sim} -no\left(\frac{1}{nx}\right) = -\frac{1}{x}o(1)$$

Dès lors :

$$\forall x > 0, \quad \lim_{n\to\infty} \ln\left(\mathbf{P}\left([Z_n \leq x]\right)\right) = 0$$

Conclusion :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left([Z_n \leq x]\right) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

$$\boxed{(Z_n)_{n\geq 1} \xrightarrow{\mathcal{L}} \delta_0}$$

67 QSP 67

Utilisons le fait que la variable X est d'espérance nulle, on a :

$$\begin{aligned} a &= \mathbf{E}(a - X) \\ &= \mathbf{E}\left((a-X)\mathbf{1}_{[X\leq a]} + (a-X)\mathbf{1}_{[X>a]}\right) \\ &\leq \mathbf{E}\left((a-X)\mathbf{1}_{[X\leq a]}\right) \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient :

$$a \leq \left(\mathbf{P}\left([X \leq a]\right)\right)^{1/2}\left(\mathbf{E}\left((a-X)^2\right)\right)^{1/2}$$

De plus :

$$\mathbf{E}\left((a-X)^2\right) = a^2 - 2a\mathbf{E}(X) + \mathbf{E}\left(X^2\right) = a^2 + \sigma^2$$

ce qui donne :

$$a \leq \mathbf{E}\left((a-X)\mathbf{1}_{[X\leq a]}\right) \leq \left(\mathbf{P}\left([X \leq a]\right)\right)^{1/2}\sqrt{a^2+\sigma^2}$$

En élevant au carré les deux membres de l'inégalité précédente on obtient :

$$\boxed{\mathbf{P}\left([X > a]\right) = 1 - \mathbf{P}\left([X \leq a]\right) \leq 1 - \frac{a^2}{a^2+\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{a^2+\sigma^2}}$$

68 QSP 68

On peut supposer que toutes les parties à $2r$ éléments de l'ensemble des chaussures ont la même probabilité d'être choisies. Cette hypothèse nous conduit à modéliser cette expérience aléatoire par l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$, où Ω désigne l'ensemble de toutes les parties à $2r$ éléments d'un ensemble à $2n$ éléments et où $\mathbf{P}$ est la probabilité uniforme (équiprobabilité). Si $A \subset \Omega$ représente l'événement : "il n'y a aucune paire complète parmi les $2r$ chaussures choisies", alors :

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\binom{n}{2r}2^{2r}}{\binom{2n}{2r}}$$

Dans la formule précédente, le coefficient $\binom{n}{2r}$ exprime le fait de choisir $2r$ paires et la puissance 2^{2r} celui de choisir, dans chaque paire, une chaussure.

Si B représente l'événement : "il n'y a exactement k paires complètes parmi les $2r$ chaussures choisies", alors :

$$\mathbf{P}(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\binom{n}{k}\binom{n-k}{2r-2k}2^{2r-2k}}{\binom{2n}{2r}}$$

Ici le coefficient $\binom{n}{k}$ exprime le fait de choisir les paires complètes, et $\binom{n-k}{2r-2k}$ celui de choisir les paires non complètes et enfin la puissance 2^{2r-2k} celui de choisir une seule chaussure parmi ces dernières.

69 QSP 69

La variable aléatoire Z ne prend que des valeurs positives presque surement et pour $t > 0$, on a :

$$\mathbf{P}([Z \leq t]) = \mathbf{P}([X \leq \ln t]) = \Phi(\ln(t))$$

où la fonction Φ désigne ici la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. La fonction de répartition de Z est donc :

$$F_Z(t) = \begin{cases} \Phi(\ln(t)) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Elle est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$. La variable aléatoire Z admet donc une densité, obtenue en dérivant là où c'est possible F_Z et en complétant le cas échéant ... On obtient :

$$f_Z(t) = \begin{cases} \dfrac{\exp\left(-(\ln t)^2/2\right)}{\sqrt{2\pi}t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $a \in [-1, 1]$, la fonction f_a définit bien une densité de probabilité sur $\mathbb{R}_+$ car elle est positive et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_a(t)\,dt = 1$. Pour vérifier cette dernière égalité il suffit d'écrire, par le théorème de transfert :

$$\int_0^{+\infty} f_Z(t)\sin(2\pi\ln t)\,dt = \mathbf{E}(\sin(2\pi\ln Z)) = \mathbf{E}(\sin(2\pi X)) = 0$$

La dernière espérance est nulle car la densité de X est paire.

Soit alors Z_a une variable aléatoire ayant f_a pour densité. On verifie sans difficulté que, quel que soit l'entier naturel k, les deux variables Z_a et Z admettent un moment d'ordre k. De plus :

$$\mathbf{E}\left(Z_a^k\right) = \int_0^{+\infty} t^k f_Z(t)(1 + a\sin(2\pi\ln t))\,dt = \mathbf{E}\left(Z^k\right) + a\int_0^{+\infty} t^k f_Z(t)\sin(2\pi\ln t)\,dt$$

Or cette dernière intégrale vaut zéro puisque :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} t^k f_Z(t)\sin(2\pi\ln t)\,dt &= \mathbf{E}\left(Z^k\sin(2\pi\ln Z)\right) \\
&= \mathbf{E}\left(e^{kX}\sin(2\pi X)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ku}e^{-u^2/2}\sin(2\pi u)\,du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-1/2\left((u-k)^2-k^2\right)}\sin(2\pi u)\,du \\
&= \frac{e^{k^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u-k)^2/2}\sin(2\pi u)\,du \\
&= \frac{e^{k^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2/2}\sin(2\pi v)\,dv \\
&\quad \text{par changement de variable } v = u - k \\
&= 0
\end{aligned}$$

Les deux variables Z_a et Z ont donc les mêmes moments mais ne suivent pas la même loi car leurs densités respectives sont distinctes. Cet exemple illustre le fait que les moments ne caractérisent pas la loi dans le cas où la variable n'est pas bornée.

70 QSP 70

Le membre de gauche de l'inégalité vous fait bien sûr penser à la loi normale, du moins je l'espère. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et x un réel positif fixé. On a :

$$\begin{aligned}
\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt &= \sqrt{2\pi}\mathbf{P}\left([0 \leq X \leq x]\right) \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\mathbf{P}\left([-x \leq X \leq x]\right) \\
&\quad \text{par parité de la densité de } X \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\mathbf{P}\left([|X| \leq x]\right) \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\left(1 - \mathbf{P}\left([|X| > x]\right)\right) \\
&\geq \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \\
&\quad \text{selon l'IBT appliquée à } X
\end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{\forall x > 0, \quad \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}$$

71 QSP 71

Soit λ un réel de $]0,1[$, on peut écrire que :

$$X = X\mathbf{1}_{[X \geq \lambda \mathbf{E}(X)]} + X\mathbf{1}_{[X < \lambda \mathbf{E}(X)]} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}\left(X\mathbf{1}_{[X < \lambda \mathbf{E}(X)]}\right) \leq \lambda \mathbf{E}(X)$$

d'où par linéarité de l'espérance :

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}\left(X\mathbf{1}_{[X \geq \lambda \mathbf{E}(X)]}\right) + \mathbf{E}\left(X\mathbf{1}_{[X < \lambda \mathbf{E}(X)]}\right) \leq \mathbf{E}\left(X\mathbf{1}_{[X \geq \lambda \mathbf{E}(X)]}\right) + \lambda \mathbf{E}(X)$$

soit encore :

$$(1-\lambda)\,\mathbf{E}(X) \leq \mathbf{E}\left(X\mathbf{1}_{[X \geq \lambda \mathbf{E}(X)]}\right)$$

En écrivant :

$$X\mathbf{1}_{[X \geq \lambda \mathbf{E}(X)]} = X\mathbf{1}_{[X \geq \lambda \mathbf{E}(X)]}\mathbf{1}_{[X \geq \lambda \mathbf{E}(X)]}$$

et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\left(\mathbf{E}\left(X\mathbf{1}_{[X \geq \lambda \mathbf{E}(X)]}\right)\right)^2 \leq \mathbf{E}\left(X^2\mathbf{1}_{[X \geq \lambda \mathbf{E}(X)]}\right) \underbrace{\mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{[X \geq \lambda \mathbf{E}(X)]}\right)}_{=\mathbf{P}([X \geq \lambda \mathbf{E}(X)])}$$

On obtient alors :

$$\mathbf{P}\left([X \geq \lambda \mathbf{E}(X)]\right) \geq \frac{\left(\mathbf{E}\left(X\mathbf{1}_{[X \geq \lambda \mathbf{E}(X)]}\right)\right)^2}{\mathbf{E}\left(X^2\mathbf{1}_{[X \geq \lambda \mathbf{E}(X)]}\right)} \geq \frac{(1-\lambda)^2\left(\mathbf{E}(X)\right)^2}{\mathbf{E}\left(X^2\mathbf{1}_{[X \geq \lambda \mathbf{E}(X)]}\right)}$$

Or il est clair que :

$$\mathbf{E}\left(X^2\mathbf{1}_{[X \geq \lambda \mathbf{E}(X)]}\right) \leq \mathbf{E}\left(X^2\right)$$

donc :

$$\boxed{\forall \lambda \in \,]0,1[\,, \quad \mathbf{P}\left([X \geq \lambda \mathbf{E}(X)]\right) \geq (1-\lambda)^2\,\frac{\left(\mathbf{E}(X)\right)^2}{\mathbf{E}\left(X^2\right)}}$$

72 QSP 72

Comme la variable X est supposée posséder une espérance, celle-ci est donnée par la formule :

$$\mathbf{E}(X) = \lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} xf(x)\,dx$$

L'existence de la limite placée dans le membre de droite NE SUFFIRAIT PAS pour affirmer l'existence de l'espérance ! ! ! Revoyez votre cours ! Nous pouvons donc écrire que :

$$\mathbf{E}(X) = \lim_{A\to+\infty} \left(\int_{-A}^{0} xf(x)\,dx + \int_{0}^{A} xf(x)\,dx\right)$$

A l'aide d'un changement de variable affine (licite) dans la première intégrale :

$$\mathbf{E}(X) = \lim_{A\to+\infty} \left(\int_{0}^{A} xf(-x)\,dx + \int_{0}^{A} xf(x)\,dx\right) = \lim_{A\to+\infty} \left(\int_{0}^{A} x\left(f(-x)\,dx + f(x)\right)dx\right)$$

Procédons alors à une intégration par parties aux fonctions $x \mapsto u(x) = F(x) + F(-x) - 1$ et $x \mapsto v(x) = x$, toutes deux de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$, on obtient donc :

$$\begin{aligned}\int_{0}^{A} x\left(f(-x)\,dx + f(x)\right)dx &= \left[x\left(F(x) + F(-x) - 1\right)\right]_0^A + \int_0^A \left(1 - F(x) - F(-x)\right)dx \\ &= A\left(F(A) + F(-A) - 1\right) + \int_0^A \left(1 - F(x) - F(-x)\right)dx\end{aligned}$$

Le résultat s'obtient par passage à la limite lorsque A tend vers $+\infty$.

73 QSP 73

Exercice ultra-classique, je n'en donnerai que les réponses ...
– Lorsque X et Y sont indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre θ :

$$\boxed{\begin{array}{ll}\forall t \in \mathbb{R}, & f_{X^3}(t) = \dfrac{\theta}{3} t^{-2/3} e^{-\theta\sqrt[3]{t}} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x) \\ \forall t \in \mathbb{R}, & f_Z(t) = \theta\left(1 + \dfrac{1}{3} t^{-2/3}\right) e^{-\theta\left(t + \sqrt[3]{t}\right)} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)\end{array}}$$

$$\boxed{|X - Y| \hookrightarrow \varepsilon(\theta)}$$

– Maintenant lorsque X et Y suivent la loi uniforme sur $[-1, 1]$:

$$\boxed{\begin{array}{ll}\forall t \in \mathbb{R}, & f_{X^3}(t) = \dfrac{1}{6} t^{-2/3} \mathbf{1}_{]-1,1[}(x) \\ \forall t \in \mathbb{R}, & f_Z(t) = \dfrac{1}{12}\left(-4\sqrt[3]{t} + 3 + t^{-2/3}\right) \mathbf{1}_{]-1,1[}(x) \\ \forall t \in \mathbb{R}, & f_{|X-Y|}(t) = \dfrac{1}{2}(2 - t)\, \mathbf{1}_{]0,2[}(x)\end{array}}$$

74 QSP 74

Il est de notoriété publique que pour tout réel x,

$$[M_n \leq x] = \bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leq x] \quad \text{et} \quad [m_n > x] = \bigcap_{i=1}^{n} [X_i > x]$$

Ainsi pour tout couple de réels (x, y) :

$$[x < m_n \leq M_n \leq y] = [x < m_n] \cap [M_n \leq y] = \bigcap_{i=1}^{n} [x < X_i \leq y]$$

et par indépendance des variables en jeu :

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{P}([x < m_n \leq M_n \leq y]) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}([x < X_i \leq y]) = \prod_{i=1}^{n} (F_i(y) - F_i(x))}$$

75 QSP 75

Soit x un réel, selon la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([\varepsilon X \leq x]) &= \mathbf{P}([\varepsilon X \leq x] \cap [\varepsilon = 1]) + \mathbf{P}([\varepsilon X \leq x] \cap [\varepsilon = -1]) \\
&= \mathbf{P}([X \leq x] \cap [\varepsilon = 1]) + \mathbf{P}([-X \leq x] \cap [\varepsilon = -1]) \\
&= \frac{1}{2}(\mathbf{P}([X \leq x]) + \mathbf{P}([-X \leq x])) \\
&= \frac{1}{2}(\mathbf{P}([X \leq x]) + \mathbf{P}([X \geq -x])) \\
&= \frac{1}{2} \times 2\mathbf{P}([X \leq x]) \\
&= \mathbf{P}([X \leq x]) \\
& \text{car } X \text{ est symétrique}
\end{aligned}$$

Ainsi X et εX suivent la même loi. On procèderait de même pour prouver que $\varepsilon |X|$ et X ont même loi.

76 QSP 76

- Si la suite $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ ne tend pas vers 0, alors quel que soit t de $]0,1[$ fixé :

$$\mathbf{P}([X_n \leq t]) = \alpha_n + t^n + \alpha_n t^n \sim \alpha_n$$

  Dans ce cas, il est nécessaire que $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ soit convergente. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \alpha$, la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en loi vers une variable de Bernoulli de paramètre $1-\alpha$.
- Si la suite $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ tend vers 0, alors la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en loi vers une variable constante égale à 1.

En conclusion, lorsque la suite $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ est convergente vers un réel α, la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en loi.

77 QSP 77

Soit ε un réel strictement positif,

$$0 \leq \mathbf{P}\left(\left[\left|\frac{X_\lambda - \lambda\theta}{\lambda}\right| \geq \varepsilon\right]\right) = \mathbf{P}([|X_\lambda - \lambda\theta| \geq \lambda\varepsilon]) \leq \frac{\mathbf{V}(X_\lambda)}{\lambda^2\varepsilon^2} = \frac{\lambda\theta}{\lambda^2\varepsilon^2}$$

Par encadrement :

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \mathbf{P}\left(\left[\left|\frac{X_\lambda - \lambda\theta}{\lambda}\right| \geq \varepsilon\right]\right) = 0$$

La majoration utilisée étant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à X_λ. On en déduit que $\left(\frac{X_\lambda - \lambda\theta}{\lambda}\right)_\lambda$ converge en probabilité vers 0 et donc en loi vers 0 (c'est de l'oral, vous pouvez donc évoquer ce résultat en proposant une démonstration !)

Pour x un réel strictement positif, on a les égalités événementielles :

$$[X_\lambda \leq \lambda\theta] = \left[\frac{X_\lambda - \lambda\theta + \lambda\theta - \lambda x}{\lambda} \leq 0\right] = \left[\frac{X_\lambda - \lambda\theta}{\lambda} \leq x - \theta\right]$$

Or :

$$\mathbf{P}([X_\lambda \leq \lambda\theta]) = e^{-\lambda\theta} \sum_{k=0}^{\lambda x} \frac{(\lambda\theta)^k}{k!}$$

et par la convergence en loi :

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \mathbf{P}\left(\left[\frac{X_\lambda-\lambda\theta}{\lambda}\leq x-\theta\right]\right)=\left\{\begin{array}{lll}0 & \text{si} & \theta>x\\ 1 & \text{si} & \theta<x\end{array}\right.$$

donc :

$$\boxed{\lim_{\lambda\to+\infty} e^{-\lambda\theta}\sum_{k=0}^{\lambda x}\frac{(\lambda\theta)^k}{k!}=\left\{\begin{array}{lll}0 & \text{si} & \theta>x\\ 1 & \text{si} & \theta<x\end{array}\right.}$$

78 QSP 78

La variable V étant supérieur ou égale à U, la variable $\dfrac{V}{U}$ prend ses valeurs dans $[1,+\infty[$. Donc pour $x<1$ la fonction de répartition $F_{V/U}(x)=0$ et pour $x\geq 1$ il vient :

$$F_{V/U}(x)=\left\{\begin{array}{lll}\mathbf{P}\left(\left[\dfrac{1-X}{X}\leq x\right]\right) & \text{si} & X\leq\dfrac{1}{2}\\ \mathbf{P}\left(\left[\dfrac{X}{1-X}\leq x\right]\right) & \text{si} & X>\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

– Si $X\leq\dfrac{1}{2}$,

$$\mathbf{P}\left(\left[\frac{1-X}{X}\leq x\right]\right)=\mathbf{P}\left(\left[X\geq\frac{1}{x+1}\right]\right)$$

– Si $X>\dfrac{1}{2}$,

$$\mathbf{P}\left(\left[\frac{X}{1-X}\leq x\right]\right)=\mathbf{P}\left(\left[X\leq\frac{x}{x+1}\right]\right)$$

Finalement, selon la formule des probabilités totales, pour chaque $x\geq 1$:

$$\begin{aligned}F_{V/U}(x) &= \mathbf{P}\left(\left[\frac{V}{U}\leq x\right]\cap\left[X\leq\frac{1}{2}\right]\right)+\mathbf{P}\left(\left[\frac{V}{U}\leq x\right]\cap\left[X>\frac{1}{2}\right]\right)\\ &= \mathbf{P}\left(\left[X\geq\frac{1}{x+1}\right]\cap\left[X\leq\frac{1}{2}\right]\right)+\mathbf{P}\left(\left[X\leq\frac{x}{x+1}\right]\cap\left[X>\frac{1}{2}\right]\right)\\ &= \mathbf{P}\left(\left[\frac{1}{x+1}\leq X\leq\frac{1}{2}\right]\right)+\mathbf{P}\left(\left[\frac{1}{2}<X\leq\frac{x}{x+1}\right]\right)\\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{x+1}+\frac{x}{x+1}-\frac{1}{2}\\ &= \frac{x-1}{x+1}\end{aligned}$$

Je vous laisse vérifier les “classes” de cette fonction de répartition pour pouvoir affirmer que la variable $\dfrac{V}{U}$ est à densité, de densité $f_{V/U}$ obtenue par dérivation de $F_{V/U}$ là où c'est possible, et en complétant le cas échéant.

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\quad f_{V/U}(x)=\frac{2}{(x+1)^2}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(x)}$$

$$\boxed{\text{Il va sans dire que la variable } \frac{V}{U} \text{ n'admet pas d'espérance}}$$

79 QSP 79

Soit F_n la fonction de répartition de la variable aléatoire $\dfrac{X_n}{n}$ à valeurs dans $\left\{\dfrac{k}{n},\ k\in[\![1,n]\!]\right\}$.

– Si $x<0$, $F_n(x)=0$.

– Si $x \in [0,1]$,

$$F_n(x) = \mathbf{P}\left(\left[\frac{X_n}{n} \leq x\right]\right) = \mathbf{P}([X_n \leq nx]) = \frac{\lfloor nx \rfloor}{x} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{nx}{x}$$

– Si $x > 1$, $F_n(x) = 1$.

Finalement :

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ x & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

En conclusion :

$$\boxed{\text{La suite } (X_n/n)_{n\geq 1} \text{ converge en loi vers une variable aléatoire uniforme sur } [0,1]}$$

80 QSP 80

C'est une question d'emploi du théorème de la limite centrée appliquée à une variable X suivant la loi $\gamma(n)$ pouvant être considérée comme une somme de n variables X_i suivant chacune une loi $\gamma(1)$ i.i.d. admettant une espérance commune égale à 1 et une variance égale à 1 aussi. Ainsi nous pouvons écrire que pour tout réel $x > 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^{n+x\sqrt{n}} \frac{u^{n-1}e^{-u}}{(n-1)!}du &= \mathbf{P}\left(\left[X \leq n + x\sqrt{n}\right]\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\left[X - n \leq x\sqrt{n}\right]\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\left[\frac{X-n}{\sqrt{n}} \leq x\right]\right) \\ &= \mathbf{P}([X^* \leq x]) \end{aligned}$$

où la suite (X^*) converge en loi vers la loi normale centrée réduite par le fameux théorème de la limite centrée. Il ne reste plus qu'à conclure en passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ pour obtenir le fameux résultat !

81 QSP 81

Comme la variable aléatoire X prend les trois valeurs $m-a$, m et $m+a$ avec, respectivement, les probabilités $1/2a^2$, $1-1/a^2$ et $1/2a^2$, on a $\mathbf{E}(X) = m$ et $\mathbf{V}(X) = 1$. D'où :

$$\mathbf{P}([|X-m| \geq a]) = \frac{1}{a^2}$$

ce qui montre que :

$$\boxed{\text{L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ne peut être améliorée, sans hypothèses supplémentaires}}$$

82 QSP 82

D'après la loi faible des grands nombres, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\left[\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right]\right) = 0$$

Par définition, pour tout réel x,

$$F_n(x) = \mathbf{P}\left(\left[\frac{S_n}{n} \leq x\right]\right)$$

Donc si $x > 0$, $F_n(x) = 1 - \mathbf{P}\left(\left[\frac{S_n}{n} > x\right]\right)$, alors que si $x < 0$, $F_n(x) = \mathbf{P}\left(\left[\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq |x|\right]\right)$. On en déduit que :

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

On vérifie qu'en tout point où F est continue, $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$, et que, par conséquent, la suite (X_n) converge en loi vers 0.

Si n est impair, S_n ne peut pas être égale à 0 ; par symétrie les événements $[S_n \geq 0]$ et $[S_n \leq 0]$ étant équiprobables, on a $F_n(0) = \mathbf{P}\left(\left[\frac{S_n}{n} \leq 0\right]\right) = \frac{1}{2}$ et, par conséquent, $F_n(0)$ ne converge pas vers $F(0) = 1$. La fonction F étant discontinue en 0, la définition de la convergence en loi n'impose pas à $F_n(0)$ de converger vers $F(0)$.

83 QSP 83

Cette question est ultra-classique. On transforme :

$$\begin{aligned}
I &= \int_2^{2+\sqrt{2}} e^{-x^2+4x-2}dx \\
&= \int_2^{2+\sqrt{2}} e^{-(x-2)^2+2}dx \\
&= e^2\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_2^{2+\sqrt{2}} \exp\left(-\left(\frac{x-2}{1}\right)^2\right)dx \\
&= e^2\sqrt{2\pi}1/\sqrt{2}\frac{1}{1/\sqrt{2}\sqrt{2\pi}}\int_2^{2+\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{1/\sqrt{2}}\right)^2\right)dx \\
&= e^2\sqrt{\pi}\left(F_X\left(2+\sqrt{2}\right) - F_X(2)\right) \\
&\quad \text{où } X \hookrightarrow \mathcal{N}(2, 1/2) \\
&= e^2\sqrt{\pi}\left(\Phi(2) - \Phi(0)\right) \\
&\quad \text{où } \Phi \text{ est la fonction de répartition de } X^* = \frac{X-2}{1/\sqrt{2}} = \sqrt{2}(X-2) \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)
\end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{I = e^2\sqrt{\pi}\left(\Phi(2) - 0.5\right) \simeq 6.2504}$$

84 QSP 84

L'événement $[U_1 \leq U_2 \leq \cdots \leq U_n]$ est réalisé si, et seulement si :
- soit $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $U_k = 0$;
- soit $\exists k \in [\![1, n-1]\!] \mid U_1 = U_2 = \cdots = U_k = 0$ et $U_{k+1} = U_{k+2} = \cdots = U_n = 1$;
- soit $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $U_k = 1$.

Cela se traduit formellement par :

$$[U_1 \leq U_2 \leq \cdots \leq U_n] = \bigcap_{i=1}^{n}[U_i = 0] \biguplus_{k=1}^{n-1}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k}[U_i = 0]\right) \cap \left(\bigcap_{i=k+1}^{n}[U_i = 1]\right)\right) \biguplus \left(\bigcap_{i=1}^{n}[U_i = 1]\right)$$

Par $\sigma-$additivité de $\mathbf{P}$ on a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left([U_1 \leq U_2 \leq \cdots \leq U_n]\right) &= \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}[U_i = 0]\right) + \sum_{k=1}^{n-1}\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k}[U_i = 0]\right) \cap \left(\bigcap_{i=k+1}^{n}[U_i = 1]\right) \\
&\quad + \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}[U_i = 1]\right)
\end{aligned}$$

Puis par indépendance muruelle des variables U_k pour $k \in [\![1, n]\!]$ il vient :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left([U_1 \leq U_2 \leq \cdots \leq U_n]\right) &= q^n + \sum_{k=1}^{n-1} q^k p^{n-k} + p^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} q^k p^{n-k}
\end{aligned}$$

$$= p^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{q}{p}\right)^k$$

Une discussion s'impose alors.

– Si $p = 1/2$ alors $q = 1/2$ et $q/p = 1$ et :

$$\mathbf{P}([U_1 \leq U_2 \leq \cdots \leq U_n]) = (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

– Si $p \neq 1/2$ alors $q/p \neq 1$ et :

$$\mathbf{P}([U_1 \leq U_2 \leq \cdots \leq U_n]) = p^n \frac{1-(q/p)^{n+1}}{1-q/p} = \frac{p^{n+1}-q^{n+1}}{p-q}$$

Bilan :

$$\boxed{\mathbf{P}([U_1 \leq U_2 \leq \cdots \leq U_n]) = \begin{cases} (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{si } p = q = 1/2 \\ \frac{p^{n+1}-q^{n+1}}{p-q} & \text{sinon} \end{cases}}$$

85 QSP 85

1. La variable Y_k suit une loi de temps d'attente de premier succès (obtention de la boule rouge). En notant pour chaque entier non nul i l'événement R_i : "obtenir la boule rouge lors du $i^{\text{ème}}$ tirage" alors pour tout entier l de $Y_k(\Omega) = \mathbf{N}^*$, $[Y_k = l] = \left(\bigcap_{k=1}^{l-1} \overline{R_k}\right) \cap R_l$. Les événements en jeu sont **indépendants** vu que les tirages par lots (ou paquets) s'effectuent **avec remise.** Ainsi pour chaque entier l de $Y_k(\Omega)$:

$$\mathbf{P}([Y_k = l]) = \mathbf{P}\left(\left(\bigcap_{k=1}^{l-1} \overline{R_k}\right) \cap R_l\right) = \prod_{k=1}^{l-1} \mathbf{P}\left(\overline{R_k}\right) \mathbf{P}(R_l)$$

avec $\forall k \geq 1$, $\mathbf{P}\left(\overline{R_k}\right) = \frac{\binom{N-1}{k}}{\binom{N}{k}}$ puisque l'univers associé à chaque tirage est l'ensemble des parties à k boules prises parmi les N muni de la probabilité uniforme, par suite $|\Omega| = \binom{N}{k}$. Enfin pour ne pas tirer la boule rouge il faut et il suffit de tirer k boules parmi les $N-1$. La relation de Laplace fait le reste ... Pour terminer $\mathbf{P}(R_l) = 1 - \mathbf{P}\left(\overline{R_l}\right)$ mais aussi plus directement $\mathbf{P}(R_l) = \frac{1 \times \binom{N-1}{k-1}}{\binom{N}{k}}$, dès lors :

$$\forall l \geq 1, \quad \mathbf{P}([Y_k = l]) = \left(\frac{\binom{N-1}{k}}{\binom{N}{k}}\right)^{k-1} \frac{\binom{N-1}{k-1}}{\binom{N}{k}}$$

ce qui se simplifie singulièrement puisque :

$$\frac{\binom{N-1}{k}}{\binom{N}{k}} = \frac{N-k}{N} = 1 - \frac{k}{N} \quad \text{et} \quad \frac{\binom{N-1}{k-1}}{\binom{N}{k}} = \frac{k}{N}$$

En conclusion :

$$\forall l \geq 1, \quad \mathbf{P}([Y_k = l]) = \left(1 - \frac{k}{N}\right)^{k-1} \frac{k}{N}$$

autrement dit :

$$\boxed{Y_k \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{k}{N}\right)}$$

Par théorème :

$$\mathbf{E}(Y_k) = \frac{N}{k} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(Y_{2k}) = \frac{N}{2k}$$

donc :

$$\boxed{\mathbf{E}(Y_k) = 2\mathbf{E}(Y_{2k})}$$

Ce résultat est logique car le nombre moyen de tirages pour l'obtention de la boule rouge est deux fois plus petit lorsque l'on tire deux fois plus de boules à chaque fois.

2. Comparer la meilleure stratégie revient à comparer les deux probabilités $\mathbf{P}([Y_2=3])$ et $\mathbf{P}([Y_3=2])$. Nous avons :
$$\begin{aligned}\mathbf{P}([Y_2=3]) &= (1-2p)^2\,2p = p\left(8p^2-8p+2\right)\\ \mathbf{P}([Y_3=2]) &= (1-3p)\,3p = p\,(-9p+3)\end{aligned}$$
Donc :
$$\mathbf{P}([Y_2=3])-\mathbf{P}([Y_3=2]) = p\left(8p^2+p-1\right)$$
Le discriminant du trinôme égale à 33 est strictement poditif, ce premier admet donc deux racines réelles (de signes opposés $\frac{-1+\sqrt{33}}{16}>0$ et $\frac{-1-\sqrt{33}}{16}<0$). Or $p=1/N\leq 1/4$ (car on rappelle que $N\geq 4$) et lorsque $p\in\left]0,\frac{-1+\sqrt{33}}{16}\right[$ le trinôme pré-cité est strictement négatif (par la règle du signe d'un trinôme du second degré), ainsi :
$$\boxed{\mathbf{P}([Y_2=3])<\mathbf{P}([Y_3=2])}$$
Ce résultat paraît intuitivement correct que l'on augmente les chances de tirer la boule rouge en tirant au total 6 boules donc en tirant plus de boules à chaque tirage, quitte à effectuer moins de tirages.

86 QSP 86

1. Commençons par l'univers image de X_N (souvent confondu avec son support) qui est clairement $[\![1,N]\!]$. Notons pour tout entier k de $[\![1,N]\!]$, F_k l'événement : "obtenir k faces au cours du $k^{\text{ème}}$ lancer". Une discussion s'impose selon les valeurs de k : $k=1$, $k\in[\![2,N-1]\!]$ et $k=N$.
– Soit $k=1$. Comme $[X_N=1]=F_1$ avec $\mathbf{P}(F_1)=1/2$ alors :
$$\mathbf{P}([X_N=1])=1/2$$
– Soit $k\in[\![2,N-1]\!]$.
$$[X_N=k]=F_1\cap F_2\cap\ldots\cap F_{k-1}\cap\overline{F_k}$$
Selon la **formule des probabilités composées :**
$$\begin{aligned}\mathbf{P}([X_N=k]) &= \mathbf{P}(F_1)\,\mathbf{P}_{F_1}(F_2)\times\cdots\times\mathbf{P}_{F_1\cap\ldots\cap F_{k-1}}\left(\overline{F_k}\right)\\ &= \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\cdots\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)\\ &= \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\cdots\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\cdots\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k(k-1)}{2}}-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k(k+1)}{2}}\end{aligned}$$
– Enfin soit $k=N$ nous avons :
$$\begin{aligned}[X_N=N] &= \left(F_1\cap F_2\cap\ldots\cap F_{N-1}\cap\overline{F_N}\right)\uplus\left(F_1\cap F_2\cap\ldots\cap F_{N-1}\cap F_N\right)\\ &= (F_1\cap F_2\cap\ldots\cap F_{N-1})\cap\left(\overline{F_N}\uplus F_N\right)\\ &= (F_1\cap F_2\cap\ldots\cap F_{N-1})\cap\Omega\\ &= F_1\cap F_2\cap\ldots\cap F_{N-1}\end{aligned}$$
Il en résulte que :
$$\mathbf{P}([X_N=N])=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\cdots\times\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{N(N-1)}{2}}$$
En conclusion :
$$\boxed{\mathbf{P}([X_N=k])=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k(k-1)}{2}}-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k(k+1)}{2}} & \text{si}\quad 1\leq k\leq N-1\\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{N(N-1)}{2}} & \text{si}\quad k=N\end{cases}}$$

2. Commençons par le calcul de $\mathbf{E}(X_N)$ qui existe par finitude de la variable en jeu avec, par définition :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X_N) &= \sum_{k=1}^{N} k\mathbf{P}([X_N = k]) \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} k\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k(k-1)}{2}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k(k+1)}{2}}\right) + N\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{N(N-1)}{2}} \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} k\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k(k-1)}{2}} - \sum_{k=1}^{N-1} k\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k(k+1)}{2}} + N\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{N(N-1)}{2}} \\
&\quad \text{par linéarité de la somme} \\
&= \sum_{k=1}^{N} k\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k(k-1)}{2}} - \sum_{k=1}^{N-1} k\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k(k+1)}{2}} \\
&= \sum_{k=1}^{N} k\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k(k-1)}{2}} - \sum_{k=2}^{N-1} (j-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{j(j-1)}{2}} \\
&\quad \text{en posant } j = k-1 \text{ dans la seconde somme} \\
&= \sum_{k=1}^{N} k\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k(k-1)}{2}} - \sum_{j=1}^{N} (j-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{j(j-1)}{2}} \\
&\quad \text{car dans la deuxième somme, le terme rajouté est nul} \\
&= \sum_{k=1}^{N} k\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k(k-1)}{2}} - \sum_{j=\mathbf{1}}^{N} (j-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{j(j-1)}{2}} \\
&= \underbrace{\sum_{k=1}^{N} k\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k(k-1)}{2}} - \sum_{j=1}^{N} j\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{j(j-1)}{2}}}_{=0} + \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{j(j-1)}{2}}
\end{aligned}$$

En conclusion :

$$\mathbf{E}(X_N) = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{j(j-1)}{2}}$$

Montrer que $\lim\limits_{N\to\infty} \mathbf{E}(X_N) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} (1/2)^{k(k-1)/2}$ revient à montrer que la série de terme général $(1/2)^{k(k-1)/2}$ soit encore que la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} (1/2)^{k(k-1)/2}\right)_{n\geq 1}$ est convergente. Constatons que la suite est croissante puisque c'est une somme de termes positifs. Il suffit donc de la majorer.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X_N) &= \sum_{k=1}^{N} (1/2)^{k(k-1)/2} \\
&= 1 + \sum_{k=2}^{N} (1/2)^{k(k-1)/2} \\
&= 1 + \sum_{k=2}^{N} \left(1/\sqrt{2}\right)^{k(k-1)} \\
&= 1 + \sum_{k=2}^{N} \left(1/\sqrt{2}\right)^{k^2-k}
\end{aligned}$$

Or pour $k \geq 2$ $\left(1/\sqrt{2}\right)^{k^2-k} \leq \left(1/\sqrt{2}\right)^{k}$ puisque :

$$\frac{\left(1/\sqrt{2}\right)^{k^2-k}}{\left(1/\sqrt{2}\right)^{k}} = \left(1/\sqrt{2}\right)^{k^2-2k} \leq 1$$

car $0 < 1/\sqrt{2} < 1$ et $k^2 - 2k \geq 0$ donc :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X_N) &= 1 + \sum_{k=2}^{N} \left(1/\sqrt{2}\right)^{k^2-k} \\
&\leq 1 + \sum_{k=2}^{N} \left(1/\sqrt{2}\right)^{k} \\
&\leq 1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \left(1/\sqrt{2}\right)^{k} \\
&\leq 1 + \frac{\left(1/\sqrt{2}\right)^2}{1-\left(1/\sqrt{2}\right)} \\
&\leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}
\end{aligned}$$

La suite $\left(\mathbf{E}(X_N)\right)_{N\geq 1}$ converge (croissante et majorée) et

$$\boxed{\lim_{N\to\infty} \mathbf{E}(X_N) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k(k-1)}{2}}}$$