Table des matières

1 Objectifs généraux de la formation 3

2 Compétences développées 3

3 Architecture des programmes 3

ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU TROISIÈME SEMESTRE 5

I - Algèbre linéaire 5

1 - Calcul vectoriel, calcul matriciel . . . 5

a) Espaces vectoriels réels . . . 5

b) Généralités sur les applications linéaires . . . 6

c) Applications linéaires en dimension finie . . . 6

2 - Réduction des endomorphismes et des matrices carrées . . . 7

a) Réduction des endomorphismes . . . 7

b) Réduction des matrices carrées . . . 7

II - Compléments d'analyse 8

1 - Compléments sur les suites et les séries . . . 8

a) Comparaison des suites réelles . . . 8

b) Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$ . . . 8

c) Compléments sur les séries . . . 8

2 - Compléments sur l'étude des fonctions réelles d'une variable réelle . . . 8

a) Comparaison des fonctions au voisinage d'un point . . . 8

b) Développements limités . . . 9

3 - Compléments sur l'intégration généralisée à un intervalle quelconque . . . 9

a) Convergence des intégrales de fonctions positives sur un intervalle de type $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, a]$ . . . 9

b) Intégrales sur un intervalle de type $[a, b[$ ou $]a, b]$ . . . 10

c) Extension au cas de fonctions ayant un nombre fini de points de discontinuité sur un intervalle I . . . 10

III - Compléments sur les variables aléatoires discrètes 10

1 - Couples de variables aléatoires discrètes . . . 10

2 - Suites de variables aléatoires discrètes . . . 12

ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU QUATRIÈME SEMESTRE 12

I - Fonctions numériques de deux variables réelles **12**
1 - Fonctions continues sur $\mathbf{R}^2$ 12
2 - Calcul différentiel pour les fonctions définies sur $\mathbf{R}^2$ 13
3 - Extrema d'une fonction de deux variables réelles 14

II - Compléments sur les variables aléatoires réelles **14**
1 - Compléments sur les variables aléatoires réelles quelconques 15
2 - Compléments sur les variables aléatoires à densité 15
a) Régularité des fonctions de répartition 15
b) Exemples simples de transferts 15
c) Compléments sur les lois usuelles 16
d) Moments d'une variable aléatoire à densité 16

III - Convergences et approximations ; estimation **16**
1 - Convergences et approximations 16
a) Inégalité de Markov, inégalité de Bienaymé-Tchebychev 16
b) Loi faible des grands nombres 17
c) Convergence en loi 17
2 - Estimation 18
a) Estimation ponctuelle 18
b) Estimation par intervalle de confiance, intervalle de confiance asymptotique 19

TRAVAUX PRATIQUES DE MATHÉMATIQUES AVEC SCILAB **21**

I - Liste des exigibles **21**
1 - Savoir-faire et compétences 21
2 - Nouvelles commandes 22

II - Liste des thèmes **22**
1 - Statistiques descriptives univariées 22
2 - Statistiques descriptives bivariées 22
3 - Chaînes de Markov 23
4 - Fonctions de deux variables 23
5 - Simulation de lois 23
6 - Estimation ponctuelle ou par intervalle de confiance 24

1 Objectifs généraux de la formation

Les mathématiques jouent un rôle important en sciences économiques et en gestion, dans les domaines notamment de la finance ou de la gestion d'entreprise, de la finance de marché, des sciences sociales. Les probabilités et la statistique interviennent dans tous les secteurs de l'économie et dans une grande variété de contextes (actuariat, biologie, épidémiologie, finance quantitative, prévision économique...) où la modélisation de phénomènes aléatoires à partir de bases de données est indispensable.

L'objectif de la formation dans les classes préparatoires économiques et commerciales n'est pas de former des professionnels des mathématiques, mais des personnes capables d'utiliser des outils mathématiques ou d'en comprendre l'usage dans diverses situations de leur parcours académique et professionnel.

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement de ces classes et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants. Ils précisent également certains points de terminologie et certaines notations.
Les limites du programme sont clairement précisées. Elles doivent être respectées aussi bien dans le cadre de l'enseignement en classe que dans l'évaluation.

Une fonction fondamentale de l'enseignement des mathématiques dans ces classes est de structurer la pensée des étudiants et de les former à la rigueur et à la logique en insistant sur les divers types de raisonnement (par équivalence, implication, l'absurde, analyse-synthèse...).

2 Compétences développées

L'enseignement de mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales vise en particulier à développer chez les étudiants les compétences suivantes :

- **Rechercher et mettre en œuvre des stratégies adéquates :** savoir analyser un problème, émettre des conjectures notamment à partir d'exemples, choisir des concepts et des outils mathématiques pertinents.
- **Modéliser :** savoir conceptualiser des situations concrètes (phénomènes aléatoires ou déterministes) et les traduire en langage mathématique, élaborer des algorithmes.
- **Interpréter :** être en mesure d'interpréter des résultats mathématiques dans des situations concrètes, avoir un regard critique sur ces résultats.
- **Raisonner et argumenter :** savoir conduire une démonstration, confirmer ou infirmer des conjectures.
- **Maîtriser le formalisme et les techniques mathématiques :** savoir employer les symboles mathématiques à bon escient, être capable de mener des calculs de manière pertinente et efficace. Utiliser avec discernement l'outil informatique.
- **Communiquer par écrit et oralement :** comprendre les énoncés mathématiques, savoir rédiger une solution rigoureuse, présenter une production mathématique.

3 Architecture des programmes

Le programme de mathématiques de deuxième année de la filière EC voie économique se situe dans le prolongement de celui de première année et permet d'en consolider les acquis. Son objectif est de fournir aux étudiants le bagage nécessaire pour suivre les enseignements spécialisés de mathématiques, économie ou gestion dispensés en Grande École ou dans une formation universitaire de troisième année de Licence.

Il s'organise autour de quatre points forts :

- En algèbre linéaire, la notion abstraite d'espace vectoriel est introduite, ainsi que celle d'application linéaire dans le cas général. Le principal objectif de cette partie est la réduction des endormorphismes en dimension finie ainsi q ue la diagonalisation des matrices carrées. On évitera des exemples trop calculatoires en privilégiant la compréhension des concepts mathématiques.
  Ces notions d'algèbre linéaire trouveront des applications en analyse lors de l'optimisation des fonctions de deux variables, mais aussi en probabilités (études de chaînes de Markov).

- En analyse, l'outil de comparaison des suites et des fonctions en termes de négligeabilité et d'équivalence est introduit. Particulièrement efficace pour l'étude des séries et des intégrales généralisées, il permettra d'affiner et de compléter l'étude des variables aléatoires discrètes et à densité. Il est à noter que seuls les développements limités à l'ordre 1 ou 2 sont au programme.
  Au quatrième semestre, l'étude des fonctions de deux variables réelles constitue un prolongement de l'analyse à une variable. Son objectif principal est d'initier les étudiants aux problèmes d'optimisation, cruciaux en économie et en finance.

- En probabilités, l'étude des variables aléatoires discrètes, initiée au lycée et poursuivie en première année de classe préparatoire, se prolonge au troisième semestre par l'étude des couples et des suites de variables aléatoires discrètes ; au quatrième semestre, les notions sur les variables aléatoires à densité, abordées dès la première année, sont complétées. L'objectif de cette partie probabilités est de permettre, en fin de formation, une approche plus rigoureuse et une compréhension plus aboutie des concepts d'estimation ponctuelle ou par intervalle de confiance.

- Les travaux pratiques de mathématiques avec Scilab sont organisés autour de six thèmes faisant intervenir divers points du programme de mathématiques. L'objectif est d'apprendre aux étudiants à utiliser Scilab de manière judicieuse et autonome ainsi que de leur permettre d'illustrer ou de modéliser des situations concrètes en mobilisant leurs connaissances mathématiques. Les savoir-faire et compétences que les étudiants doivent acquérir lors de ces séances de travaux pratiques sont spécifiés dans la liste des exigibles et rappelés en préambule de chaque thème. Les nouvelles notions mathématiques introduites dans certains thèmes ne font pas partie des exigibles du programme. L'enseignement de ces travaux pratiques se déroulera sur les créneaux horaires dédiés à l'informatique.

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme. L'algèbre linéaire trouvera ainsi son application dans les problèmes d'optimisation, l'analyse et les probabilités dans les problèmes d'estimation.

Le programme de mathématiques est organisé en deux semestres. Ce découpage en deux semestres d'enseignement doit être respecté. En revanche, au sein de chaque semestre, aucun ordre particulier n'est imposé et chaque professeur conduit en toute liberté l'organisation de son enseignement, bien que la présentation par blocs soit fortement déconseillée.

Le programme se présente de la manière suivante : dans la colonne de gauche figurent les contenus exigibles des étudiants ; la colonne de droite comporte des précisions sur ces contenus ou des exemples d'activités ou d'applications.

Les développements formels ou trop théoriques doivent être évités. Ils ne correspondent pas au cœur de formation de ces classes préparatoires.

Les résultats mentionnés dans le programme seront admis ou démontrés selon les choix didactiques faits par le professeur. Pour certains résultats, marqués comme «admis», la présentation d'une démonstration en classe est déconseillée.

Les séances de travaux dirigés permettent de privilégier la prise en main, puis la mise en œuvre par les étudiants, des techniques usuelles et bien délimitées, inscrites dans le corps du programme. Cette maîtrise s'acquiert notamment par l'étude de problèmes que les étudiants doivent *in fine* être capables de résoudre par eux-mêmes.

Le logiciel Scilab comporte de nombreuses fonctionnalités permettant d'illustrer simplement certaines notions mathématiques. Ainsi, on utilisera dès que possible l'outil informatique en cours de mathématiques pour visualiser et illustrer les notions étudiées.

ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU TROISIÈME SEMESTRE

I - Algèbre linéaire

L'objectif de ce chapitre est une étude élémentaire des applications linéaires et des espaces vectoriels sur $\mathbf{R}$*, approfondissant les acquis de première année et les prolongeant par l'étude de la réduction des endomorphismes et des matrices. Cette partie du programme aura de nombreuses applications, que ce soit en analyse dans l'étude des points critiques des fonctions de deux variables ou en probabilités (chaînes de Markov...).*

1 - Calcul vectoriel, calcul matriciel

a) Espaces vectoriels réels

Espace vectoriel sur $\mathbf{R}$. Combinaisons linéaires. Sous-espaces vectoriels.	On illustrera ces définitions en liaison avec le programme de première année complété par les espaces vectoriels de référence suivants : $\mathbf{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$, $\mathbf{R}_n[X]$, $\mathbf{R}[X]$, l'ensemble des applications d'un ensemble $D \subset \mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, l'ensemble des suites réelles $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.
Familles libres, familles génératrices, bases. Base canonique de $\mathbf{R}^n$, de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ et de $\mathbf{R}_n[X]$.	On réinvestira à cette occasion les notions sur les systèmes linéaires étudiées en première année.
Espace vectoriel de dimension finie.	Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il admet une base constituée d'un nombre fini de vecteurs.
Si un espace vectoriel admet une base constituée de n vecteurs, toute autre base a n vecteurs.	Théorème admis.
Dimension d'un espace vectoriel.	
Cardinal d'une famille libre (respectivement génératrice) d'un espace vectoriel de dimension n.	Résultats admis.
Une famille libre (respectivement génératrice) à n vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n est une base.	Résultats admis.
Dimension d'un sous-espace vectoriel. Rang d'une famille de vecteurs.	Théorème admis.

Rang d'une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$.	Le rang d'une matrice est le rang de la famille de ses vecteurs colonnes.
$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA)$.	Résultat admis.

b) Généralités sur les applications linéaires

Application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F. Endomorphisme de E.	
Espaces vectoriels des applications linéaires d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F, des endomorphismes de E.	Notations $\mathcal{L}(E,F)$, $\mathcal{L}(E)$.
Composée de deux applications linéaires.	
Isomorphisme d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F. Automorphisme de E. Application réciproque d'un isomorphisme.	
Noyau et image d'une application linéaire.	

c) Applications linéaires en dimension finie

Les espaces vectoriels considérés dans ce paragraphe sont de dimension finie.

Rang d'une application linéaire.	
Théorème du rang. Application à la caractérisation des isomorphismes en dimension finie.	Résultat admis.
Matrice associée à une application linéaire dans des bases, matrice d'un endomorphisme.	Lien entre le rang d'une matrice et le rang de l'application linéaire associée. Lien entre le produit matriciel et la composition des applications linéaires.
Isomorphisme entre $\mathcal{L}(F,E)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$, entre $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ lorsque les bases sont fixées.	E et F étant des espaces vectoriels de dimensions respectives n et p, $(n,p) \in (\mathbf{N}^*)^2$.
Polynôme annulateur d'un endomorphisme, d'une matrice.	Existence admise. On pourra utiliser des polynômes annulateurs pour étudier l'inversibilité d'un endomorphisme ou d'une matrice.
Changement de base, matrice de passage d'une base $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}'$. $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.	Notation $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.
Formules de changement de base.	$X_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} X_{\mathcal{B}'}$. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1}\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\ P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.
Matrices semblables.	Deux matrices A et B carrées sont semblables si et seulement s'il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$. A et B peuvent être interprétées comme les matrices d'un même endomorphisme dans des bases différentes.

2 - Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Les espaces vectoriels considérés sont de dimension finie.
Dans tout ce paragraphe, on évitera les méthodes trop calculatoires pour la recherche des éléments propres d'une matrice ou d'un endomorphisme. En particulier, la résolution de systèmes à paramètres est déconseillée.

a) Réduction des endomorphismes

Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres d'un endomorphisme de E.	
Spectre d'un endomorphisme.	Notation $\mathrm{Sp}(f)$.
Une concaténation de familles libres de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes forme une famille libre de E. Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n a au plus n valeurs propres.	En particulier, une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est une famille libre. Résultats admis.
Si Q est un polynôme annulateur de f, toute valeur propre de f est racine de Q.	Aucune connaissance supplémentaire sur les polynômes annulateurs n'est au programme.
Un endomorphisme f de E est dit diagonalisable s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de f.	
Tout endomorphisme f d'un espace vectoriel de dimension n admettant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.	Dans ce cas, tous les sous-espaces propres de f sont de dimension 1.
Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à n.	Résultat admis.

b) Réduction des matrices carrées

Valeurs propres, vecteurs colonnes propres, sous-espaces propres d'une matrice carrée. Valeurs propres d'une matrice triangulaire.	
Spectre d'une matrice carrée.	Notation $\mathrm{Sp}(A)$.
Si Q est un polynôme annulateur de A, toute valeur propre de A est racine de ce polynôme.	Aucune connaissance supplémentaire sur les polynômes annulateurs n'est au programme.
Matrice carrée diagonalisable.	Une matrice carrée A d'ordre n est diagonalisable s'il existe une matrice D, diagonale, et une matrice P, inversible, telles que $D = P^{-1}AP$. Les colonnes de P forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ constituée de vecteurs propres de A.
Toute matrice carrée A d'ordre n admettant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.	Dans ce cas, tous les sous-espaces propres de A sont de dimension 1.

Une matrice carrée d'ordre n est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à n.	Résultat admis. Exemples de diagonalisation de matrices carrées. Sur des exemples, application au calcul de puissances n-ièmes d'une matrice carrée. Exemples de calculs de puissances n-ièmes d'une matrice carrée, non nécessairement diagonalisable, à l'aide de la formule du binôme.
Toute matrice symétrique est diagonalisable.	Résultat admis.

II - Compléments d'analyse

1 - Compléments sur les suites et les séries

L'objectif de ce paragraphe est d'introduire de nouveaux outils d'étude des suites et des séries, en particulier les critères de comparaison, tout en consolidant les acquis de première année.

a) Comparaison des suites réelles

Suite négligeable devant une suite, suites équivalentes.	Notations $u_n = o(v_n)$ et $u_n \sim v_n$. On pratiquera des études du comportement asymptotique de suites.

b) Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Notion de point fixe d'une application. Si (u_n) converge vers un réel ℓ et si f continue en ℓ, alors ℓ est un point fixe de f.	On pourra illustrer en classe cette partie du programme à l'aide du logiciel Scilab.

c) Compléments sur les séries

Convergence des séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.	
Séries à termes positifs. Comparaison des séries à termes positifs dans les cas où $u_n \leqslant v_n$, $u_n = o(v_n)$ et $u_n \sim v_n$.	
Exemples d'étude de séries à termes quelconques.	On utilisera la notion de convergence absolue vue en première année. Sommes télescopiques.

2 - Compléments sur l'étude des fonctions réelles d'une variable réelle

a) Comparaison des fonctions au voisinage d'un point

Comparaison des fonctions au voisinage d'un point. Fonction négligeable devant une fonction, fonctions équivalentes.

Notations $f = o(g)$ et $f \sim g$.
Les théorèmes de croissances comparées vus en première année sont reformulés ici avec les notations de la négligeabilité.
Traduction, en termes de négligeabilité et d'équivalence, des limites connues concernant les fonctions usuelles.

Compatibilité de l'équivalence vis-à-vis des opérations suivantes : produit, quotient, composition par une fonction puissance entière.

On mettra en garde contre l'extension abusive à l'addition ou à la composition par d'autres fonctions $(\ln, \exp, \dots)$.

b) Développements limités

*Les développements limités ne seront présentés qu'**à l'ordre au plus 2**, prolongeant la notion de développement limité à l'ordre 1 abordée en première année. Les développements limités seront par la suite étendus aux fonctions de deux variables.*
Les seuls développements exigibles concernent les fonctions $x \mapsto e^x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ au voisinage de 0, et à l'ordre 1 ou 2 uniquement. Aucune connaissance (somme, produit, composition...) concernant les techniques de calcul des développements limités n'est exigible.

Développement limité d'ordre 2 (respectivement d'ordre 1) en x_0 d'une fonction de classe C^2 (respectivement de classe C^1) au voisinage de x_0.

Unicité. Formule de Taylor-Young.

Résultats admis.

Cas des fonctions $x \mapsto e^x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ au voisinage de 0.

Sur des exemples, application à l'étude locale de fonctions.

3 - Compléments sur l'intégration généralisée à un intervalle quelconque

Il s'agit ici d'une part d'étendre la notion d'intégrale à un intervalle quelconque, d'autre part de mettre en place les techniques de comparaison des intégrales de fonctions positives. Les résultats de ce paragraphe pourront être admis. À cette occasion, on pourra consolider les acquis de première année concernant l'intégration sur un segment (positivité, techniques de calcul, intégrales comme fonctions de la borne supérieure...).

a) Convergence des intégrales de fonctions positives sur un intervalle de type $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, a]$

Soit f une fonction continue et positive sur $[a, +\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si

$$x \longmapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \text{ est majorée sur } [a, +\infty[.$$

De même, si f est continue et positive sur $]-\infty, a]$, $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x \longmapsto \displaystyle\int_x^a f(t)\mathrm{d}t$ est majorée sur $]-\infty, a]$.

Règles de comparaison dans les cas $f \leqslant g$, $f = o(g)$ et $f \underset{+\infty}{\sim} g$ avec f et g positives au voisinage de $+\infty$.

On adaptera ces propriétés au voisinage de $-\infty$.
On utilisera comme intégrales de référence les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ (pour $a > 0$) et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\mathrm{d}t$ étudiées en première année.

b) Intégrales sur un intervalle de type $[a, b[$ ou $]a, b]$

Convergence de l'intégrale d'une fonction continue sur $[a, b[$ (respectivement : $]a, b]$), avec $-\infty < a < b < +\infty$.

L'intégrale est dite convergente si $\lim\limits_{x \to b} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ (respectivement : $\lim\limits_{x \to a} \int_x^b f(t)\mathrm{d}t$) existe et est finie.
On pose alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim\limits_{x \to b} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ (respectivement : $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim\limits_{x \to a} \int_x^b f(t)\mathrm{d}t$).

La convergence absolue implique la convergence.

Résultat admis.

Intégrales $\int_0^b \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ $(b > 0)$, $\int_0^1 \ln t \ \mathrm{d}t$.
Règles de comparaison dans les cas $f \leqslant g$, $f = o(g)$ et $f \sim g$ avec f et g positives au voisinage de b (respectivement : a).

c) Extension au cas de fonctions ayant un nombre fini de points de discontinuité sur un intervalle I

Brève extension aux fonctions ayant un nombre fini de points de discontinuité sur un intervalle quelconque.

On s'attachera essentiellement aux cas $]-\infty, +\infty[$ et $]0, +\infty[$.

Règles de calcul sur les intégrales convergentes, linéarité, relation de Chasles, positivité.

Les techniques de calcul (intégration par parties, changement de variables) seront pratiquées sur des intégrales sur un segment. Seuls les changements de variables affines pourront être utilisés directement sur des intégrales sur un intervalle quelconque.

III - Compléments sur les variables aléatoires discrètes

Dans tout ce paragraphe les variables aléatoires considérées sont des variables aléatoires réelles discrètes.

1 - Couples de variables aléatoires discrètes

On ne soulèvera aucune difficulté sur les séries indexées par des ensembles dénombrables, que l'on traitera comme des séries classiques. On admettra que toutes les manipulations (interversions de sommes, regroupements de termes, etc.) sont licites dès lors que les séries envisagées sont absolument convergentes. On admettra aussi que les théorèmes ou les techniques classiques concernant les séries s'étendent dans ce cadre.

Loi de probabilité d'un couple de variables aléatoires discrètes.	La loi de probabilité d'un couple de variables aléatoires discrètes est caractérisée par la donnée de $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$ et pour tout $(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $P([X=x] \cap [Y=y])$. On commencera par aborder des exemples où $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis.
Lois marginales, lois conditionnelles.	
Loi d'une variable aléatoire $Z = g(X,Y)$ où g est une fonction définie sur l'ensemble des valeurs prises par le couple (X,Y).	On se limitera à des cas simples tels que $X+Y$, XY.
Théorème de transfert : espérance d'une variable aléatoire $Z = g(X,Y)$ où g est une fonction réelle définie sur l'ensemble des valeurs prises par le couple (X,Y) de variables aléatoires.	$E(g(X,Y)) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} g(x,y) P([X=x] \cap [Y=y])$ sous réserve de convergence absolue. Résultat admis. En particulier : espérance de la somme, du produit de deux variables aléatoires discrètes.
Linéarité de l'espérance.	Résultat admis.
Indépendance de deux variables aléatoires réelles discrètes.	Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout $(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $P([X=x] \cap [Y=y]) = P([X=x])P([Y=y])$.
Espérance du produit de deux variables aléatoires discrètes indépendantes.	Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes admettant une espérance, alors XY admet également une espérance et $E(XY) = E(X)E(Y)$. On pourra admettre ce résultat.
Loi du minimum, du maximum, de deux variables aléatoires réelles discrètes indépendantes.	
Stabilité des lois binomiales et de Poisson.	• Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois $\mathcal{B}(n_1,p)$ et $\mathcal{B}(n_2,p)$, alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1+n_2,p)$. • Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois $\mathcal{P}(\lambda_1)$ et $\mathcal{P}(\lambda_2)$, alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.
Covariance de deux variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2. Propriétés.	Notation $\mathrm{Cov}(X,Y)$. Linéarité à droite, à gauche. Symétrie. Si $a \in \mathbf{R}$, $\mathrm{Cov}(X,a) = 0$.
Formule de Huygens. Conséquence.	$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. Si X et Y sont indépendantes et possèdent un moment d'ordre 2, leur covariance est nulle. Réciproque fausse.
Coefficient de corrélation linéaire.	Notation $\rho(X,Y)$.

Propriétés.	$\lvert\rho(X,Y)\rvert \leqslant 1$. Cas où $\rho(X,Y) = \pm 1$.
Variance de la somme de deux variables aléatoires discrètes. Cas de deux variables aléatoires discrètes indépendantes.	On pourra admettre ce résultat.

2 - Suites de variables aléatoires discrètes

Indépendance mutuelle de n variables aléatoires réelles discrètes.	$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \ldots \times X_n(\Omega)$, $$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i = x_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} P([X_i = x_i]).$$
Indépendance d'une suite infinie de variables aléatoires réelles discrètes.	
Lemme des coalitions.	Si X_1, X_2 ,..., X_n, sont indépendantes, toute variable aléatoire fonction de $X_1, X_2, \ldots, X_p$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction de X_{p+1}, X_{p+2}, ..., X_n. Résultat admis.
Espérance de la somme de n variables aléatoires réelles discrètes. Variance de la somme de n variables aléatoires réelles discrètes indépendantes.	

ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU QUATRIÈME SEMESTRE

I - Fonctions numériques de deux variables réelles

L'objectif de ce chapitre est d'arriver à une bonne compréhension des problèmes de recherche d'extrema des fonctions de deux variables en faisant le lien avec les résultats concernant la réduction des matrices.
Dans les deux premiers paragraphes, on familiarisera les étudiants avec la notion de fonction de deux variables réelles en évitant tout problème de nature topologique, c'est pourquoi le domaine de définition sera systématiquement $\mathbf{R}^2$.
On introduira la notion de fonction de deux variables réelles à l'aide d'exemples issus d'autres disciplines et on exploitera les visualisations informatiques des surfaces en 3D ou les recherches d'éléments propres de matrices permises par Scilab.

Tous les résultats concernant les fonctions réelles de deux variables réelles seront admis.

1 - Fonctions continues sur $\mathbf{R}^2$

Exemples de fonctions réelles de deux variables réelles.	Fonctions coordonnées $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$. Fonctions polynomiales de deux variables réelles.

Distance euclidienne de deux points $\mathbf{R}^2$.	Notation $\mathrm{d}\big((x,y),(x_0,y_0)\big)$.
Continuité d'une fonction définie sur $\mathbf{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$.	Une fonction réelle f de deux variables réelles, définie sur $\mathbf{R}^2$, est continue en un point (x_0,y_0) de $\mathbf{R}^2$ si : $\forall\varepsilon>0, \exists r>0, \forall(x,y)\in\mathbf{R}^2$, $\mathrm{d}\big((x,y),(x_0,y_0)\big)<r \Rightarrow \mid f(x,y)-f(x_0,y_0)\mid<\varepsilon$. Aucune difficulté ne sera soulevée sur cette notion. On fera le lien avec la continuité des fonctions d'une variable réelle.
Opérations sur les fonctions continues.	Les fonctions coordonnées sont continues sur $\mathbf{R}^2$. On admettra que la somme, le produit, le quotient (quand le dénominateur est non nul) de deux fonctions continues sont continus. Les fonctions polynomiales de deux variables réelles sont continues sur $\mathbf{R}^2$. On admettra que la composée d'une fonction continue à valeurs dans un intervalle I de $\mathbf{R}$ par une fonction continue sur I à valeurs dans $\mathbf{R}$ est continue.

2 - Calcul différentiel pour les fonctions définies sur $\mathbf{R}^2$

Dérivées partielles d'ordre 1. Fonctions de classe C^1. Une fonction de classe C^1 est continue. Opérations sur les fonctions de classe C^1.	Notations $\partial_1(f)$, $\partial_2(f)$. La détermination de la classe d'une fonction en un point problématique est hors programme.
Gradient de f en un point.	Notation $\nabla(f)(x,y)=\begin{pmatrix}\partial_1(f)(x,y)\\ \partial_2(f)(x,y)\end{pmatrix}$.
Développement limité d'ordre 1 d'une fonction de classe C^1. Unicité.	$f(x+h,y+k)=f(x,y)+{}^t\nabla(f)(x,y)\cdot\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix}$ $+\sqrt{h^2+k^2}\,\varepsilon(h,k)$ où $\varepsilon(0,0)=0$ et ε continue en (0,0). Résultat non exigible.
Dérivées partielles d'ordre 2. Fonctions de classe C^2. Une fonction de classe C^2 est de classe C^1. Opérations sur les fonctions de classe C^2.	Notations $\partial^2_{1,1}(f), \partial^2_{1,2}(f), \partial^2_{2,1}(f), \partial^2_{2,2}(f)$ où $$\partial^2_{1,2}(f)(x,y)=\partial_1(\partial_2(f))(x,y).$$
Théorème de Schwarz.	Si f est de classe C^2 sur $\mathbf{R}^2$, alors pour tout point (x,y) de $\mathbf{R}^2$, $$\partial^2_{1,2}(f)(x,y)=\partial^2_{2,1}(f)(x,y).$$
Matrice hessienne d'une fonction de deux variables réelles au point (x,y).	Notation $\nabla^2(f)(x,y)=\begin{pmatrix}\partial^2_{1,1}(f)(x,y) & \partial^2_{1,2}(f)(x,y)\\ \partial^2_{2,1}(f)(x,y) & \partial^2_{2,2}(f)(x,y)\end{pmatrix}$. On remarquera que si f est de classe C^2 sur $\mathbf{R}^2$, sa matrice hessienne en tout point (x,y) de $\mathbf{R}^2$ est symétrique.

Développement limité d'ordre 2 d'une fonction de classe C^2. Unicité.	$f(x+h, y+k) = f(x,y) + {}^t\nabla(f)(x,y) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ $+ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \cdot \nabla^2(f)(x,y) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + (h^2+k^2)\ \varepsilon(h,k)$ où $\varepsilon(0,0) = 0$ et ε continue en (0,0). Résultat non exigible.

3 - Extrema d'une fonction de deux variables réelles

Dans ce paragraphe, on sensibilisera les étudiants aux notions d'ouverts et de fermés de $\mathbf{R}^2$*. On donnera la définition d'un ensemble borné.*
La détermination de la nature topologique d'un ensemble n'est pas un objectif du programme et devra toujours être indiquée.
On étendra brièvement les définitions et propriétés concernant la continuité (respectivement le calcul différentiel) à des fonctions définies sur des parties (respectivement parties ouvertes) de $\mathbf{R}^2$*.*

Maximum, minimum local d'une fonction de deux variables réelles. Maximum, minimum global d'une fonction de deux variables réelles sur une partie de $\mathbf{R}^2$.	
Une fonction continue sur une partie fermée et bornée de $\mathbf{R}^2$ est bornée et atteint ses bornes sur cette partie.	Résultat admis.
Condition nécessaire d'existence d'un extremum local. Point critique.	Si une fonction de classe C^1 sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbf{R}^2$ admet un extremum local en un point (x_0, y_0) de $\mathcal{O}$, alors $\nabla(f)(x_0, y_0) = 0$.
Condition suffisante d'existence d'un extremum local.	Soit f une fonction de classe C^2 sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbf{R}^2$. Si $(x_0, y_0) \in \mathcal{O}$ est un point critique pour f et si les valeurs propres de la matrice hessienne de f au point (x_0, y_0) sont strictement positives (respectivement strictement négatives) alors f admet un minimum (respectivement maximum) local en (x_0, y_0).
Point col (ou point selle).	Si $(x_0, y_0) \in \mathcal{O}$ est un point critique pour f et si les valeurs propres de la matrice hessienne de f au point (x_0, y_0) sont non nulles et de signes opposés, alors f n'admet pas d'extremum local en (x_0, y_0) et (x_0, y_0) est un point col pour f.

II - Compléments sur les variables aléatoires réelles

La notion d'espérance pour une variable discrète ou à densité a été définie en première année. La définition de l'espérance ou des moments d'ordre supérieur d'une variable aléatoire quelconque est hors d'atteinte dans le cadre de ce programme et toute difficulté s'y ramenant est à écarter. On admettra que les propriétés opératoires usuelles de l'espérance et de la variance se généralisent aux variables aléatoires quelconques. En particulier, le théorème de transfert ci-dessous permet de calculer l'espérance de $g(X)$ *dans le cas où* X *est à densité.*

1 - Compléments sur les variables aléatoires réelles quelconques

Tous les résultats de cette section seront admis.

Indépendance de deux variables aléatoires réelles quelconques.	Deux variables aléatoires réelles X et Y sont indépendantes si et seulement si $P([X \in I] \cap [Y \in J]) = P([X \in I])P([Y \in J])$ pour tous intervalles réels I et J. Généralisation à un ensemble fini ou une suite de variables aléatoires réelles quelconques.
Lemme des coalitions.	Si X_1, X_2, ..., X_n sont indépendantes, toute variable aléatoire fonction de X_1, X_2, ..., X_p est indépendante de toute variable aléatoire fonction de X_{p+1}, X_{p+2}, ..., X_n.
Espérance d'une somme de variables aléatoires.	Si X et Y admettent une espérance, $X+Y$ admet une espérance et $E(X+Y) = E(X)+E(Y)$. Généralisation à n variables aléatoires.
Croissance de l'espérance.	Si $P([X \leqslant Y]) = 1$ alors $E(X) \leqslant E(Y)$.
Espérance du produit de variables aléatoires indépendantes.	Si X et Y admettent une espérance et sont indépendantes, XY admet une espérance et $E(XY) = E(X)E(Y)$. Généralisation à n variables aléatoires mutuellement indépendantes.
Variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes.	Si X et Y sont indépendantes et admettent une variance, $X+Y$ admet une variance et $V(X+Y) = V(X)+V(Y)$. Généralisation à n variables aléatoires mutuellement indépendantes.

2 - Compléments sur les variables aléatoires à densité

a) Régularité des fonctions de répartition

Si f est une densité de probabilité, $F : x \longmapsto \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ est de classe C^1 en tout point où f est continue.	En un tel point, $F'(x) = f(x)$. Plus généralement, si f est continue à droite (respectivement à gauche) en x, F est dérivable à droite (respectivement à gauche) en x. Résultats admis.

b) Exemples simples de transferts

On réinvestira dans ce paragraphe les lois usuelles à densité étudiées en première année.

Calculs de fonctions de répartition et de densités de fonctions d'une variable aléatoire à densité.	Les candidats devront savoir retrouver les densités de $aX+b$ $(a \neq 0)$, X^2, $\exp(X)$, ... Loi de $X = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-Y)$, où Y suit une loi uniforme à densité sur l'intervalle $[0,1[$.

c) Compléments sur les lois usuelles

Transformées affines de variables aléatoires suivant des lois uniformes.	Si $a < b$, $X \hookrightarrow \mathcal{U}[0,1] \iff Y = a + (b-a)X \hookrightarrow \mathcal{U}[a,b]$.
Transformées affines de variables aléatoires suivant des lois normales.	Si $a \neq 0$, $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m,\sigma^2) \iff aX + b \hookrightarrow \mathcal{N}(am+b, a^2\sigma^2)$.
Propriété de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.	$\forall x \in \mathbf{R}, \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.
Une somme de variables aléatoires indépendantes suivant des lois normales suit une loi normale.	Résultat admis.

d) Moments d'une variable aléatoire à densité

Théorème de transfert pour l'espérance.	Si X est une variable aléatoire admettant une densité f nulle en dehors d'un intervalle $]a,b[$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$ et si g est une fonction continue sauf éventuellement en un nombre fini de points sur $]a,b[$, $g(X)$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t)f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument et dans ce cas : $E(g(X)) = \displaystyle\int_a^b g(t)f(t)\,\mathrm{d}t$. Résultat admis.
Définition du moment d'ordre r $(r \in \mathbf{N}^*)$.	Notation $m_r(X) = E(X^r)$.
Variance, écart-type, variables aléatoires centrées réduites. Variance d'une variable aléatoire suivant une loi usuelle (uniforme, exponentielle, normale).	Exemples de variables aléatoires n'admettant pas de variance.

III - Convergences et approximations ; estimation

1 - Convergences et approximations

a) Inégalité de Markov, inégalité de Bienaymé-Tchebychev

On pourra démontrer ces inégalités dans le cas d'une variable aléatoire discrète ou à densité.

Inégalité de Markov.	Si X est une variable aléatoire à valeurs positives et admettant une espérance, $\forall a > 0, \quad P([X \geqslant a]) \leqslant \dfrac{E(X)}{a}$. Résultat non exigible. On pourra appliquer cette inégalité à $Y = \lvert X\rvert^r$, $r \in \mathbf{N}^*$.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Si X est une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2,
$$\forall \varepsilon > 0, \quad P([|X - E(X)| \geqslant \varepsilon]) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

b) Loi faible des grands nombres

Loi faible des grands nombres.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes admettant une même espérance m et une même variance et soit pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\overline{X}_n = \dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$.

Alors $\forall \varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P([|\overline{X}_n - m| \geqslant \varepsilon]) = 0$.

c) Convergence en loi

Définition de la convergence en loi d'une suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires vers une variable aléatoire X.

Une suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires converge en loi vers X si $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ en tout réel x où F_X est continue.

Notation $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Caractérisation dans le cas où les X_n, $n \in \mathbf{N}^*$ et X prennent leurs valeurs dans $\mathbf{Z}$.

$(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers X si et seulement si :
$$\forall k \in \mathbf{Z}, \quad \lim_{n\to+\infty} P([X_n = k]) = P([X = k]).$$
Résultat admis.

Application à la convergence d'une suite de variables aléatoires suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$ vers une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Théorème limite central.

Si $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, et admettant une variance σ^2 non nulle, la suite des variables aléatoires centrées réduites $\overline{X}_n^* = \sqrt{n}\left(\dfrac{\overline{X}_n - m}{\sigma}\right)$ associées aux variables $\overline{X}_n = \dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$, $n \in \mathbf{N}^*$, converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

D'où, on a pour tout (a, b) tel que $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$:
$$\lim_{n\to+\infty} P([a \leqslant \overline{X}_n^* \leqslant b]) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t.$$
Résultats admis.

Exemples d'approximations de la loi binomiale et de la loi de Poisson par la loi normale.

Toutes les indications devront être fournies aux candidats quant à la justification de l'utilisation des approximations.

2 - Estimation

L'objectif de cette partie est d'introduire le vocabulaire et la démarche de la statistique inférentielle en abordant, sur quelques cas simples, le problème de l'estimation, ponctuelle ou par intervalle de confiance. On se restreindra à une famille de lois de probabilités indexées par un paramètre scalaire (ou vectoriel) dont la valeur (scalaire ou vectorielle) caractérise la loi. On cherche alors à estimer la valeur du paramètre (ou une fonction simple de ce paramètre) à partir des données disponibles.

Dans ce contexte, on considère un phénomène aléatoire et on s'intéresse à une variable aléatoire réelle X qui lui est liée, dont on suppose que la loi de probabilité n'est pas complètement spécifiée et appartient à une famille de lois dépendant d'un paramètre θ décrivant un sous-ensemble Θ de $\mathbf{R}$ (éventuellement de $\mathbf{R}^2$).

Le paramètre θ est une quantité inconnue, fixée dans toute l'étude, que l'on cherche à déterminer ou pour laquelle on cherche une information partielle.

Le problème de l'estimation consiste alors à estimer la vraie valeur du paramètre θ ou de $g(\theta)$ (fonction à valeurs réelles du paramètre θ), à partir d'un échantillon de données $x_1, \ldots, x_n$ obtenues en observant n fois le phénomène. Cette fonction du paramètre représentera en général une valeur caractéristique de la loi inconnue comme son espérance, sa variance, son étendue...

On supposera que cet échantillon est la réalisation de n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ définies sur un même espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ muni d'une famille de probabilités $(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$. Les $X_1, \ldots, X_n$ seront supposées P_θ-indépendantes et de même loi que X pour tout θ.

On appellera estimateur de $g(\theta)$ toute variable aléatoire réelle de la forme $\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ où φ est une fonction de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$, éventuellement dépendante de n, et indépendante de θ, dont la réalisation après expérience est envisagée comme estimation de $g(\theta)$.

Un estimateur se définit donc dans l'intention de fournir une estimation.

Si T_n est un estimateur, on notera, lorsque ces valeurs existent, $E_\theta(T_n)$ l'espérance de T_n et $V_\theta(T_n)$ la variance de T_n, pour la probabilité P_θ.

a) Estimation ponctuelle

Estimer ponctuellement $g(\theta)$ par $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ où $\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est un estimateur de $g(\theta)$ et $(x_1, \ldots, x_n)$ est une réalisation de l'échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$, c'est décider d'accorder à $g(\theta)$ la valeur $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$.

n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi que X.	Exemples de n-échantillons associés à une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$ avec $\theta = p$.
Définition d'un estimateur.	Un estimateur de $g(\theta)$ est une variable aléatoire de la forme $T_n = \varphi(X_1, \ldots, X_n)$. La réalisation $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ de l'estimateur T_n est l'estimation de $g(\theta)$. Cette estimation ne dépend que de l'échantillon $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ observé.
Estimation de l'espérance d'une variable aléatoire.	Exemples d'estimateurs : estimateur du paramètre p d'une loi de Bernoulli ; estimateur du paramètre λ d'une loi de Poisson.

Biais d'un estimateur.	Si pour tout θ de Θ, T_n admet une espérance, on appelle biais de T_n le réel $$b_\theta(T_n) = E_\theta(T_n) - g(\theta).$$
Estimateur sans biais.	L'estimateur T_n de $g(\theta)$ est sans biais si $E_\theta(T_n) = g(\theta)$ pour tout θ de Θ.
Suite $(T_n)_{n\geqslant 1}$ d'estimateurs de $g(\theta)$.	Chaque T_n est de la forme $\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
Estimateur asymptotiquement sans biais.	Une suite $(T_n)_{n\geqslant 1}$ d'estimateurs de $g(\theta)$ est asymptotiquement sans biais si pour tout θ de Θ, $\lim\limits_{n\to\infty} E_\theta(T_n) = g(\theta)$. Par abus de langage on dit aussi que l'estimateur est asymptotiquement sans biais.
Risque quadratique d'un estimateur.	Si pour tout θ de Θ, T_n admet un moment d'ordre 2, on appelle risque quadratique de T_n le réel $r_\theta(T_n) = E_\theta\big((T_n - g(\theta))^2\big)$.
Décomposition biais - variance du risque quadratique d'un estimateur.	$$r_\theta(T_n) = b_\theta(T_n)^2 + V_\theta(T_n).$$
Estimateur convergent.	Une suite d'estimateurs $(T_n)_{n\geqslant 1}$ de $g(\theta)$ est convergente si pour tout θ de Θ, $$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} P_\theta([\lvert T_n - g(\theta)\rvert > \varepsilon]) = 0.$$ Par abus de langage on dit aussi que l'estimateur T_n est convergent.
Condition suffisante de convergence d'un estimateur.	Si pour tout θ de Θ, $\lim\limits_{n\to+\infty} r_\theta(T_n) = 0$, alors la suite d'estimateurs $(T_n)_{n\geqslant 1}$ de $g(\theta)$ est convergente. Cette convergence pourra être étudiée à l'aide de l'inégalité de Markov.

b) Estimation par intervalle de confiance, intervalle de confiance asymptotique

S'il existe des critères pour juger des qualités d'un estimateur ponctuel T_n de $g(\theta)$ (biais, risque, convergence), aucune certitude ne peut jamais être apportée quant au fait que l'estimation donne la vraie valeur à estimer.
La démarche de l'estimation par intervalle de confiance consiste à trouver un intervalle aléatoire qui contienne $g(\theta)$ avec une probabilité minimale donnée. L'utilisation dans certains cas du théorème limite central impose d'introduire la notion d'intervalle de confiance asymptotique.
Ce paragraphe a uniquement pour but de préciser le vocabulaire employé. Les situations seront étudiées sous forme d'exercices, aucune connaissance autre que ce vocabulaire n'est exigible sur les intervalles de confiance.
Dans tout ce paragraphe $(U_n)_{n\geqslant 1}$ et $(V_n)_{n\geqslant 1}$ désigneront des suites d'estimateurs de $g(\theta)$ tels que pour tout $\theta \in \Theta$ et pour tout $n \geqslant 1$, $P_\theta([U_n \leqslant V_n]) = 1$.

Intervalle de confiance, niveau de confiance.	On dit que $[U_n, V_n]$ est un intervalle de confiance de $g(\theta)$ au niveau de confiance $1-\alpha$ ($\alpha \in [0,1]$) si pour tout $\theta \in \Theta$, $$P_\theta([U_n \leqslant g(\theta) \leqslant V_n]) \geqslant 1 - \alpha.$$

Intervalle de confiance asymptotique.	On appelle intervalle de confiance asymptotique de $g(\theta)$ au niveau de confiance $1-\alpha$ une suite $([U_n, V_n])_{n\geqslant 1}$ vérifiant : pour tout θ de Θ, il existe une suite de réels (α_n) à valeurs dans $[0,1]$, de limite α, telle que pour tout $n \geqslant 1$, $P_\theta([U_n \leqslant g(\theta) \leqslant V_n]) \geqslant 1-\alpha_n$. Par abus de langage on dit aussi que $[U_n, V_n]$ est un intervalle de confiance asymptotique.
Intervalles de confiance pour le paramètre d'une loi de Bernoulli.	On pourra comparer, en majorant $p(1-p)$ par $\frac{1}{4}$, les intervalles de confiance obtenus par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et par l'approximation de la loi binomiale par la loi normale.

TRAVAUX PRATIQUES DE MATHÉMATIQUES AVEC SCILAB

En première année, les étudiants ont acquis les bases de manipulation du logiciel Scilab. L'objectif de l'enseignement d'informatique de seconde année est de leur permettre d'utiliser Scilab de manière judicieuse et autonome pour illustrer ou modéliser des situations concrètes en mobilisant leurs connaissances mathématiques.

Le programme d'informatique s'articule autour de six thèmes : statistiques descriptives univariées, statistiques descriptives bivariées, chaînes de Markov, fonctions de plusieurs variables, simulation de lois, estimation ponctuelle ou par intervalle de confiance.

Les heures de travaux pratiques de mathématiques avec Scilab peuvent être organisées sous différentes formes selon les contenus à enseigner ; certaines séances, notamment celles nécessitant peu de manipulations logicielles de la part des étudiants, pourront avoir lieu en classe entière, d'autres en groupes réduits.

L'ordre dans lequel les thèmes sont abordés est libre, mais il est préférable de mener ces activités en cohérence avec la progression du cours de mathématiques.

Dans certains thèmes, il s'avérera nécessaire d'introduire de nouvelles notions ou approches mathématiques. Celles-ci devront être explicitées en préambule des séances d'informatique et ne pourront en aucun cas être exigibles des étudiants. Certaines seront propres à un thème particulier, d'autres (comme par exemple les méthodes de Monte-Carlo) pourront au contraire être envisagées de manière transversale. Toutes les précisions nécessaires devront toujours être données lors de leur utilisation.

Toute la richesse du logiciel Scilab ne peut pas être entièrement maîtrisée par un étudiant, aussi seules les fonctions et commandes du programme de première année et celles figurant dans la sous-partie «Commandes exigibles» sont exigibles. Néanmoins, se contenter de ces seules commandes, en ignorant les nombreuses possibilités et commodités du logiciel, se révélerait rapidement contraignant et limitatif. De nouvelles commandes Scilab peuvent donc être introduites, avec parcimonie, l'objectif principal de l'activité informatique restant la mise en pratique des connaissances mathématiques. Ces commandes supplémentaires devront être présentées en préambule et toutes les précisions nécessaires devront être données lors de leur utilisation et leur interprétation. On favorisera à cette occasion l'autonomie et la prise d'initiatives des étudiants grâce à l'utilisation de l'aide de Scilab, et à l'usage d'opérations de «copier-coller» qui permettent de prendre en main rapidement des fonctions nouvelles et évitent d'avoir à connaître par cœur la syntaxe de commandes complexes.

L'objectif de ces travaux pratiques n'est pas l'écriture de longs programmes mais l'assimilation de savoir-faire et de compétences spécifiés dans la liste des exigibles et rappelés en préambule de chaque thème.

Les exemples traités dans un thème devront être tirés, autant que possible, de situations réelles (traitement de données économiques, sociologiques, historiques, démographiques, en lien avec le monde de l'entreprise ou de la finance, etc.), en faisant dès que possible un rapprochement avec les autres disciplines.

I - Liste des exigibles

1 - Savoir-faire et compétences

C1 : Produire et interpréter des résumés numériques et graphiques d'une série statistique (simple, double) ou d'une loi.

C2 : Modéliser et simuler des phénomènes (aléatoires ou déterministes) et les traduire en langage mathématique.

C3 : Représenter et exploiter le graphe d'une fonction d'une ou deux variables.

C4 : Représenter et interpréter les différentes convergences.

C5 : Utiliser à bon escient la méthode de Monte-Carlo.

C6 : Porter un regard critique sur les méthodes d'estimation et de simulation.

2 - Nouvelles commandes

Toutes les commandes du programme de première année sont exigibles. Les seules nouvelles commandes exigibles des candidats sont indiquées dans ce paragraphe.

La connaissance des commandes suivantes ainsi que de leurs arguments est exigible des candidats :

`sum`, `cumsum`, `mean`, `max`, `min`, `zeros`, `ones`, `eye`, `spec`.

Les commandes suivantes devront avoir été manipulées par les étudiants mais la connaissance détaillée de leurs arguments n'est pas exigible des candidats :

`cdfnor`, `plot2d`, `fplot2d`, `plot3d`, `fplot3d`.

II - **Liste des thèmes**

1 - Statistiques descriptives univariées

(Durée indicative : 3 heures. Compétences développées : **C1** et **C6**)

Dans ce paragraphe, on analysera des données statistiques issues de l'économie, du monde de l'entreprise ou de la finance, en insistant sur les représentations graphiques. On insistera sur le rôle des différents indicateurs de position et de dispersion étudiés.

Série statistique associée à un échantillon. Effectifs, fréquences, fréquences cumulées, diagrammes en bâton, histogrammes. Indicateurs de position : moyenne, médiane, mode, quantiles. Indicateurs de dispersion : étendue, variance et écart-type empiriques, écart inter-quantile.	On pourra également utiliser les commandes : `dsearch`, `tabul`, `pie`, `stdeviation`, `median`.

2 - Statistiques descriptives bivariées

(Durée indicative : 3 heures. Compétences développées : **C1** et **C6**)

On introduira dans ce paragraphe la notion de produit scalaire dans $\mathbf{R}^2$ *simplement dans l'objectif de l'étude de la droite de régression d'une série statistique à deux variables.*

Notion de produit scalaire dans $\mathbf{R}^2$. Orthogonalité. Série statistique à deux variables, nuage de points associé. Point moyen $(\bar{x}, \bar{y})$ du nuage. Covariance empirique, cœfficient de corrélation empirique, droites de régression.	On tracera le nuage de points et les droites de régression et on pourra effectuer des pré-transformations pour se ramener au cas linéaire. On différenciera les variables explicatives des variables à expliquer. On pourra utiliser les commandes : `stdeviation`, `corr`.

3 - Chaînes de Markov

(Durée indicative : 6 heures. Compétences développées : **C2** et **C4**)

Ce thème sera l'occasion de revoir les simulations de lois discrètes étudiées en première année ainsi que d'appliquer les résultats et techniques d'algèbre linéaire étudiés au troisième semestre.

Matrice de transition. Étude sur des exemples simples. Comportement limite.	On pourra étudier par exemple l'indice de popularité d'une page Web (PageRank), modéliser l'évolution d'une société (passage d'individus d'une classe sociale à une autre), ou les systèmes de bonus-malus en assurances. Simulation et mise en évidence d'états stables avec la commande `grand(n,'markov',M, x0)`.

4 - Fonctions de deux variables

(Durée indicative : 3 heures. Compétences développées : **C2** et **C3**)

Graphe d'une fonction de deux variables, lignes de niveau. Dérivées partielles, représentation du gradient.	À cette occasion, on pourra mettre en évidence l'orthogonalité du gradient avec les lignes de niveau.
Étude d'extrema locaux et globaux.	Programmation de fonctions variées permettant de mettre en évidence les notions d'extrema locaux ou globaux. On pourra prendre des exemples issus de l'économie ou de la finance : minimisation du risque, maximisation du profit...

5 - Simulation de lois

(Durée indicative : 6 heures. Compétences développées : **C1**, **C2** et **C6**)

Dans toutes les simulations effectuées, on pourra comparer les échantillons obtenus avec les distributions théoriques, en utilisant des diagrammes en bâtons et des histogrammes. On pourra aussi tracer la fonction de répartition empirique et la comparer à la fonction de répartition théorique.

Simulation de la loi uniforme sur $[0, 1]$; sur $[a, b]$.	Utilisation du générateur `grand`.
Méthode d'inversion.	Application de la méthode d'inversion pour la simulation de la loi exponentielle de paramètre λ.

Méthodes de simulation d'une loi géométrique.	Utilisation d'une loi de Bernoulli et d'une boucle `while`, utilisation d'une loi exponentielle et de la fonction `floor`, utilisation du générateur `grand`.
Simulations informatiques d'une loi normale par utilisation du théorème limite central appliqué à différentes lois.	Comparaison entre différentes méthodes de simulation d'une loi normale. On pourra s'intéresser au cas particulier de 12 variables aléatoires indépendantes suivant une même loi uniforme.

6 - Estimation ponctuelle ou par intervalle de confiance

(Durée indicative : 6 heures. Compétences développées : **C2**, **C4**, **C5** et **C6**)

Méthode de Monte-Carlo : principe, garanties d'approximation.	Cette méthode permet d'estimer des quantités qu'il est difficile de calculer explicitement mais qu'il est facile d'approcher par simulation. On pense typiquement à des probabilités d'événements ou des espérances de variables aléatoires. Ainsi, on pourra estimer par exemple les valeurs prises par la fonction de répartition de la somme ou du produit de deux variables aléatoires ou encore, estimer le niveau réel, à rang n fini, d'intervalles de confiance asymptotiques (cf. ci-dessous).
Comparaison de différents estimateurs ponctuels d'un paramètre.	On pourra utiliser des données issues de situations réelles (simple comparaison de valeurs numériques) ou créer plusieurs jeux de données par simulation grâce à la commande `grand`. Dans ce dernier cas, on pourra comparer les lois des estimateurs par exemple à l'aide d'histogrammes.
Comparaison des intervalles de confiance d'un paramètre obtenus par différentes méthodes.	Estimation par intervalle de confiance du paramètre d'une loi de Bernoulli et de l'espérance d'une loi normale. La comparaison pourra se faire en calculant les demi-largeurs moyennes des intervalles et leurs niveaux de confiance.

