

Le 03/05/2017 à 07H55

Tous les résultats du cours (réforme 2014) en un clin d'oeil

Légendes et abréviations

- ▶ **D** Définition.
- ▶ **T** Théorème.
- ▶ **P** Proposition.
- ▶ **Pr** Propriété (s).
- ▶ **C** Corollaire.
- ▶ **R** Remarque.
- ▶ HP : résultat hors programme.
- ▶ © : résultat valable en continu.
- ▶ Ⓢ : résultat valable en discret.
- ▶ \sqcup : union disjointe
- ▶ $|E|$: cardinal de E .
- ▶ ssrv : sous réserve de convergence.
- ▶ ssr|cv| : sous réserve de convergence absolue.
- ▶ i.i.d. : variables indépendantes et identiquement distribuées.
- ▶ SCE : système complet d'événements.
- ▶ v.a.r.d. : variable aléatoire discrète.
- ▶ v.a.r.a.d. : variable aléatoire à densité.
- ▶ $\sum_i u_i < +\infty$: série simple convergente (symbole hors programme à ne surtout pas utiliser).
- ▶ $\sum_{i,j} u_{i,j} < +\infty$: série double convergente (symbole hors programme à ne surtout pas utiliser).
- ▶ $A \perp B$: A et B indépendants (le symbole \perp hors programme à ne surtout pas utiliser).
- ▶ $X \perp Y$: X et Y indépendantes (le symbole \perp hors programme à ne surtout pas utiliser).
- ▶ $X_1 \perp \dots \perp X_n$: X_1, \dots, X_n mutuellement indépendantes (le symbole \perp hors programme à ne surtout pas utiliser).
- ▶ $\forall k \geq 1, \mathcal{L}^k$ (respectivement \mathcal{L}_d^k) espace vectoriel des variables (discrètes) admettant un moments d'ordre k (notation \mathcal{L}_*^k hors programme à ne surtout pas utiliser)
- ▶ P_X : loi de X .

ENSEMBLES

D (**Définition intuitive d'un ensemble**) C'est le tout formant une collection d'objets ayant une propriété commune. Chaque objet d'un ensemble est appelé **élément**, et écrire que x est un élément de A se note $x \in A$. Dans le cas contraire, on note $x \notin A$. On dit que $A = B$ lorsque $\forall x \in A, x \in B$ et $\forall x \in B, x \in A$. Par contraposée $A \neq B$ lorsque $\exists x \in A, x \notin B$ ou $\exists x \in B, x \notin A$.

R L'ordre de l'écriture des éléments d'un ensemble n'a aucune importance, ainsi que leurs répétitions éventuelles. Par exemple : $\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\} = \{1, 1, 2, 3, 3, 3\}$.

D Soit A et B deux ensembles, on dira que B est un **sous-ensemble** de A ou que B est une **partie** de A si et seulement si tout élément de B est aussi un élément de A . Ainsi : $B \subset A$ lorsque $\forall x \in B, x \in A$.

R $(A = B) \iff (A \subset B \text{ et } B \subset A)$.

D On appelle **ensemble des parties** de A , l'ensemble de tous les sous-ensembles de A , on le note $\mathcal{P}(A)$, il contient évidemment A lui-même et l'ensemble vide.

R ▶ Ecrire $A \subset E$ se traduit par $A \in \mathcal{P}(E)$ (⚠ on n'écrit jamais $A \in E!$).

▶ Ecrire $a \in A$ se traduit par $\{a\} \subset A$ (⚠ on n'écrit jamais $a \subset A!$).

D ▶ $A \cup B = \{x \in \Omega, x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

▶ $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I, x \in A_i\}$.

Pr $A \cup A = A, A \cup B = B \cup A, A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A \subset A \cup B, B \subset A \cup B, (A \subset B) \iff (A \cup B = B), \emptyset \cup A = A, \Omega \cup A = \Omega, A \cup \bar{A} = \Omega$.

D ▶ $A \cap B = \{x \in \Omega, x \in A \text{ et } x \in B\}$.

▶ $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I, x \in A_i\}$.

Pr $A \cap A = A, A \cap B = B \cap A, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, A \cap B \subset A, A \cap B \subset B, (A \subset B) \iff (A \cap B = A), \emptyset \cap A = \emptyset, \Omega \cap A = A, A \cap \bar{A} = \emptyset$.

Pr ▶ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (**Distributivités**).

▶ $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \cup B = \bigcap_{i \in I} (A_i \cup B), \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B), \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) =$

$\bigcap_{(i,j) \in I \times J} (A_i \cup B_j), \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (A_i \cap B_j)$ (**Distributivités**).

Pr ▶ $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}, \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ (où $\bar{A} = \complement_E A$) (**Lois de Morgan**).

▶ $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \bar{A}_i, \overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \bar{A}_i$ (**Lois de Morgan généralisées**).

Pr $(B = \bar{A}) \iff (A \cup B = E \text{ et } A \cap B = \emptyset) \iff (A \sqcup B = E)$.

$$\boxed{\text{Pr}} \quad \overline{\Omega} = \emptyset, \overline{\emptyset} = \Omega, \overline{\overline{A}} = A, (B = \overline{A}) \iff (A = \overline{B}), (A \subset B) \implies (\overline{B} \subset \overline{A}).$$

$$\boxed{\text{D}} \quad A - B = \{x \in \Omega, x \in A \text{ et } x \notin B\}.$$

$$\boxed{\text{Pr}} \quad A - B = A \cap \overline{B}, A - B = A - (A \cap B), \overline{\overline{A}} = \Omega - A, ((A - B) = A) \iff (A \cap \overline{B} = \emptyset).$$

$$\boxed{\text{D}} \quad A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A) \text{ (Différence symétrique HP)}.$$

$$\boxed{\text{D}} \quad \blacktriangleright A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ et } b \in B\} \text{ (Produit cartésien de deux ensembles)}.$$

$$\blacktriangleright A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_n \in A_n\}.$$

$\boxed{\text{D}}$ Soit E un ensemble. Pour toute partie A de E , on définit la **fonction indicatrice** (ou **fonction caractéristique**) de A notée $\mathbf{1}_A$ par : $\mathbf{1}_A : x \in E \mapsto \mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \in \{0; 1\}$.

$$\boxed{\text{Pr}} \quad \blacktriangleright \forall x \in E, \mathbf{1}_\Omega(x) = 1, \mathbf{1}_\emptyset(x) = 0.$$

$$\blacktriangleright \mathbf{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbf{1}_A, \mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B, \mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B.$$

FORMULES COMBINATOIRES

$\boxed{\text{P}}$ Soit n un entier naturel,

$$\blacktriangleright \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$\blacktriangleright \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$\blacktriangleright \sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

$$\boxed{\text{D}} \quad \blacktriangleright \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \text{ avec } 0 \leq p \leq n.$$

$$\blacktriangleright \text{On pose } \binom{n}{p} = 0 \text{ lorsque } p > n.$$

$$\boxed{\text{Pr}} \quad \blacktriangleright \forall (n, p) \in \mathbf{N}^2, p \leq n, \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \text{ (symétrie)}.$$

$$\blacktriangleright \forall (n, p) \in \mathbf{N}^2, 1 \leq p \leq n, \binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1} \text{ (la formule sans nom !)}$$

$$\blacktriangleright \forall (n, p) \in \mathbf{N}^2, 1 \leq p \leq n, \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} \text{ (triangle de Pascal)}.$$

$$\blacktriangleright \forall (p, d) \in \mathbf{N}^2, p \leq d, \sum_{n=p}^d \binom{n}{p} = \binom{d+1}{p+1} \text{ (triangle de Pascal généralisée)}.$$

$$\boxed{\text{T}} \text{ Formule du binôme de Newton : } \forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, (a+b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^p b^{n-p}.$$

$$\boxed{\text{C}} \quad \blacktriangleright \forall (n, p) \in \mathbf{N}^2, p \leq n, \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n.$$

$$\boxed{\text{Pr}} \quad \blacktriangleright \forall n \in \mathbf{N}^*, \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p} = 2^{n-1} = \sum_{p=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2p+1} \text{ (HP et doit être redémontré)}$$

$$\boxed{\text{Pr}} \quad \blacktriangleright \forall n \in \mathbf{N}^*, \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

$\boxed{\text{T}}$ **Formule multinomiale** (HP mais ...) $\forall (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p,$

$$\sum_{\substack{(n_1, \dots, n_p) \in [0, n]^p \\ n_1 + \dots + n_p = n}} \underbrace{\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_p!}}_{\text{coeff. multinomial}} a_1^{n_1} \times \dots \times a_p^{n_p} = (a_1 + \dots + a_p)^n \text{ où } n \in \mathbf{N}.$$

$\boxed{\text{T}}$ **Vandermonde** (HP mais ...) $\forall (n_1, n_2, n) \in \mathbf{N}^3, n \leq n_1 + n_2,$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n_1}{k} \binom{n_2}{n-k} = \binom{n_1 + n_2}{n} \text{ (HP et doit être redémontré)}$$

$$\boxed{\text{C}} \quad \forall n \in \mathbf{N}, \sum_{p=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

$\boxed{\text{T}}$ **Vandermonde généralisé** (HP mais ...) $\forall (N_1, \dots, N_k) \in \mathbf{N}^p,$

$$\sum_{\substack{(n_1, \dots, n_k) \in [0, n]^k \\ n_1 + \dots + n_k = n}} \binom{N_1}{n_1} \binom{N_2}{n_2} \times \dots \times \binom{N_k}{n_k} = \binom{N_1 + \dots + N_k}{n}.$$

$$\boxed{\text{Pr}} \quad \forall (n, p) \in \mathbf{N}^2, p \leq n, \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} 1 = \binom{n}{p}.$$

$$\boxed{\text{Pr}} \quad \forall (n, p) \in \mathbf{N}^2, n \geq 1, \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_p \leq n} 1 = \binom{p+n-1}{p} \text{ (HP et doit être}$$

redémontré).

$$\boxed{\text{D}} \quad \blacktriangleright \forall (n, p) \in \mathbf{N}^2, p \leq n, \forall (a_p, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^p, \prod_{k=p}^n a_k = a_p \times \dots \times a_n.$$

$$\blacktriangleright \text{On pose } \prod_{k=p}^n a_k = 1 \text{ quand } p > n.$$

$\boxed{\text{Pr}}$ Soit n un entier naturel,

$$\blacktriangleright \prod_{k=0}^n k = n!$$

$$\blacktriangleright \prod_{k=0}^n (2k) = 2^n n!$$

$$\blacktriangleright \prod_{k=0}^n (2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}.$$

DÉNOMBREMENT

Pr \blacktriangleright Soit A et B deux ensembles tels que A est fini et $B \subset A$, alors $\text{Card}(B) \leq \text{Card}(A)$ et $\text{Card}(A - B) = \text{Card}(A) - \text{Card}(B)$.

$$\blacktriangleright (\text{Card}(A) = \text{Card}(B)) \Leftrightarrow (A = B).$$

$$\blacktriangleright \text{Card}(A \sqcup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B), \text{Card}\left(\bigsqcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \text{Card}(A_k).$$

$$\blacktriangleright \forall n \in \mathbf{N}^*, \text{Card}\left(\prod_{k=1}^n A_k\right) = \prod_{k=1}^n \text{Card}(A_k).$$

T **Formule de Poincaré ou du crible pour deux ensembles :**

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B).$$

R. La généralisation de cette formule a disparu du programme.

D **Partition d'un ensemble :** On dit que la famille d'événements $(A_i)_{i \in I}$ est une *partition* de $E : \forall i \in I, A_i \neq \emptyset, (\forall (i, j) \in I^2, i \neq j) \Rightarrow (A_i \cap A_j = \emptyset)$ et $\bigsqcup_{i \in I} A_i = E$.

Remarque : c'est la même déf. pour un SCE avec $E = \Omega$.

P **Lemme des bergers :** Soit E et F deux ensembles finis et f une application *surjective* de E vers F . On suppose qu'il existe $p \in \mathbf{N}^*$ tel que pour tout $y \in F$, $\text{Card}(f^{-1}(\{y\})) = p$, alors $\text{Card}(E) = p \text{Card}(F)$.

P **Nombre d'applications de E vers F :** $\text{Card}(\mathcal{A}(E, F)) = (\text{Card}(F))^{\text{Card}(E)}$.

P **Nombre d'injections de E_p vers F_n avec $p \leq n : A_p^n$.**

P **Nombre de permutations de E_n avec $n \in \mathbf{N}^* : A_n^n = n!$**

P **Nombre de p -listes de $E_n : n^p$.**

P **Nombre de combinaisons de p éléments de E_n , avec $1 \leq p \leq n :$**

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1) \times \dots \times (n-p+1)}{p!}.$$

P **Nombre de parties d'un ensemble $E : \text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\text{Card}(E)}$.**

P **Problème des anagrammes :**

$$\binom{n}{n_1} \times \binom{n-n_1}{n_2} \times \dots \times \binom{n-n_1-\dots-n_{p-1}}{n_p} = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_p!}.$$

P **Nombre de suites :**

$$\blacktriangleright \text{Card}(\{(x_1, x_2, \dots, x_p) \in (\mathbf{N}^*)^p \mid 1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_p \leq n\}) = \binom{n}{p}.$$

$$\blacktriangleright \text{Card}(\{(x_1, x_2, \dots, x_p) \in (\mathbf{N}^*)^p \mid 1 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_p \leq n\}) = \binom{p+n-1}{p}.$$

ESPACES PROBABILISÉS

D **Tribu :** Tout ensemble de parties d'un ensemble Ω , contenant Ω , stable par réunion au plus dénombrable et par passage au complémentaire, s'appelle une **tribu** ou σ -algèbre sur Ω , souvent notée \mathcal{A} . Autrement dit : $\Omega \in \mathcal{A}, \forall A \in \mathcal{A}, \bar{A} \in \mathcal{A}$, pour toute suite $(A_n)_{n \geq n_0}$ d'événements de $\mathcal{A}, \bigcup_{n=n_0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

P : $\emptyset \in \mathcal{A}, \mathcal{A}$ est stable pour $\cap, -, \Delta$.

P $\blacktriangleright \sigma(\mathcal{A}) = \{\emptyset, \mathcal{A}, \bar{\mathcal{A}}, \Omega\}$.

\blacktriangleright Soit $(A_k)_{k \in K}$ un SCE alors $\sigma((A_k)_{k \in K}) = \left\{ \bigsqcup_{l \in L} A_l \mid L \in \mathcal{P}(K) \right\}$.

\blacktriangleright Si Ω au plus dénombrable $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

P **Tribu de Borel de $\mathbf{R} :$ $\mathcal{B}(\mathbf{R}) = \sigma(\{-\infty, x[, x \in \mathbf{R}\}) = \sigma(\{x, +\infty[, x \in \mathbf{R}\}) = \dots$**

P **Quelle tribu utiliser le jour du concours ?**

$\blacktriangleright \Omega$ est fini : $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

$\blacktriangleright \Omega$ est infini et dénombrable : $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

$\blacktriangleright \Omega$ est infini et indénombrable : $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbf{R})$.

D **Axiomatique d'une probabilité :** Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace probabilisable, on appelle *probabilité* sur (Ω, \mathcal{A}) toute application $\mathbf{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ vérifiant : $\mathbf{P}(\Omega) = 1, \forall (A_k)_{k \in K}$, deux à deux disjoints $\sum_k \mathbf{P}(A_k) < \infty$ et $\mathbf{P}\left(\bigsqcup_{k \in K} A_k\right) = \sum_{k \in K} \mathbf{P}(A_k)$ (σ -additivité de \mathbf{P}).

D On appelle **espace probabilisé** tout triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Pr Soit A et B deux évts de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}) :$

$\blacktriangleright \mathbf{P}(\emptyset) = 0$.

$\blacktriangleright \mathbf{P}(A \sqcup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$.

$\blacktriangleright \mathbf{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$.

$\blacktriangleright \mathbf{P}(A - B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap B)$.

$\blacktriangleright (B \subset A) \Rightarrow (\mathbf{P}(A - B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(B))$.

$\blacktriangleright (B \subset A) \Rightarrow (\mathbf{P}(B) \leq \mathbf{P}(A))$ propriété de croissance de \mathbf{P} .

$\blacktriangleright \mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$ (formule du crible pour deux ensembles dont la généralisation a disparu des programme)

$\blacktriangleright \mathbf{P}\left(\bigsqcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(A_k)$.

T **Limite monotone :**

$\blacktriangleright ((A_n)_{n \geq 0} \nearrow) \Rightarrow (\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(A_n))$.

► $((A_n)_{n \geq 0} \searrow) \Rightarrow (\mathbf{P}(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(A_n)).$

C Soit $(A_n)_{n \geq 0}$ une suite quelconque d'événements :

$\mathbf{P}(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(\bigcup_{k=0}^n A_k)$ et $\mathbf{P}(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(\bigcap_{k=0}^n A_k).$

T Inégalité de Boole ou sous-additivité (HP mais ...)

$\mathbf{P}(\bigcup_{k=1}^n A_k) \leq \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(A_k)$ et $\mathbf{P}(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n)$ (où $\sum_n \mathbf{P}(A_n) < \infty$ ou diverge).

T Relation de Laplace (cas d'équiprobabilité) $\forall A \in \mathcal{A}, \mathbf{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$.

D Indépendance d'événements :

► 2 événements : $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \mathbf{P}(B).$

► n événements 2 à 2 indépendants :

$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, (i \neq j) \Rightarrow (\mathbf{P}(A_i \cap A_j) = \mathbf{P}(A_i) \mathbf{P}(A_j)).$

► n événements mutuellement indépendants :

$\forall I \in \mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket), I \neq \emptyset, \mathbf{P}(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} \mathbf{P}(A_i).$

► Suites d'événements : on se ramène au cas fini pour toutes sous-suites finies.

P Les assertions suivantes sont équivalentes :

► $A \perp\!\!\!\perp B,$

► $A \perp\!\!\!\perp \bar{B},$

► $\bar{A} \perp\!\!\!\perp B,$

► $\bar{A} \perp\!\!\!\perp \bar{B}.$

P Soit $(A_n)_n$ une suite d'événements indépendants alors $(B_n)_n$ où pour tout entier $n, B_n = A_n$ ou \bar{A}_n reste une suite d'événements indépendants.

D Probabilité conditionnelle : $\forall A \in \mathcal{A} \mid \mathbf{P}(A) \neq 0, \mathbf{P}_A(B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A)}$.

P Toutes les propriétés vues sur les probas inconditionnelles sont encore valable.

P On dit que deux événements A et B où $\mathbf{P}(A) \neq 0$ et $\mathbf{P}(B) \neq 0$, sont indépendants si l'une des conditions équivalentes est vérifiée :

► $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \mathbf{P}(B).$

► $\mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B).$

► $\mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A).$

P Formule des probabilités composées : Soit A_1, \dots, A_n, n événements tel que pour tout $n \geq 2, \mathbf{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$, alors :

$\mathbf{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1) \mathbf{P}_{A_1}(A_2) \mathbf{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots \mathbf{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n).$

P Formule des probabilités totales : Soit $(A_k)_{k \in K}$ un SCE tel que $\forall k \in K, \mathbf{P}(A_k) \neq 0$, alors $\forall B \in \mathcal{A}, \sum_k \mathbf{P}_{A_k}(B) \mathbf{P}(A_k) < \infty$ et $\mathbf{P}(B) = \sum_{k \in K} \mathbf{P}_{A_k}(B) \mathbf{P}(A_k).$

P Bayes : Soit $(A_k)_{k \in K}$ un SCE tel que $\forall k \in K, \mathbf{P}(A_k) \neq 0$, alors $\forall B \in \mathcal{A} \mid \mathbf{P}(B) \neq 0 : \forall i \in K, \mathbf{P}_B(A_i) = \frac{\mathbf{P}_{A_i}(B) \mathbf{P}(A_i)}{\sum_{k \in K} \mathbf{P}_{A_k}(B) \mathbf{P}(A_k)}$.

V.A.R.

Généralités $\textcircled{S} \textcircled{C}$

D $\textcircled{S} \textcircled{C} : X : \Omega \rightarrow \mathbf{R} \mid \forall B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}), X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}.$

D $\textcircled{S} : X$ v.a.r.d. si $X(\Omega)$ est au plus dénombrable.

D $\textcircled{C} : X$ v.a.r.a.d. si $X(\Omega)$ est ∞ et indénombrable.

D $\textcircled{S} \textcircled{C} : X = Y$ lorsque $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) = Y(\omega).$

D $\textcircled{S} \textcircled{C} : X = Y$ p.s. lorsque $\mathbf{P}([X = Y]) = 1.$

D $\textcircled{S} \mathcal{A}_X = \sigma(\{[X = x]\}_{x \in X(\Omega)}) = \left\{ \bigsqcup_{x \in A} [X = x] \mid A \subset X(\Omega) \right\}.$

D Loi de probabilité $\textcircled{S} : P_X : X(\Omega) \rightarrow [0, 1]$, définie par $\forall x \in X(\Omega), P_X(x) = \mathbf{P}([X = x]).$

P Caractérisation d'une loi

► $\textcircled{S} : \text{On donne les probabilités ponctuelles ou bien la fonction de répartition.}$

► $\textcircled{C} : \text{On donne une densité de } X \text{ ou la fonction de répartition } F_X.$

P $\textcircled{S} \textcircled{C} : (P_X = P_Y) \iff (F_X = F_Y).$

P $\textcircled{S} \textcircled{C} : (X = Y) \Rightarrow (P_X = P_Y).$

P $\textcircled{S} \textcircled{C} : (P_X = P_Y) \Rightarrow (\forall k \geq 0, \mathbf{E}(X^k) = \mathbf{E}(Y^k)).$

P Caractérisation d'une densité $\textcircled{C} : (\text{caractérisation}) (f \text{ densité}) \iff (f \geq 0 \text{ sur } \mathbf{R}, \mathcal{C}^0 \text{ presque partout, } \int_{-\infty}^{+\infty} f \text{ converge et vaut } 1)$

D Fonction de répartition F

► $\textcircled{S} : \forall x \in \mathbf{R}, F(x) = \sum_{\substack{x_i \in X(\Omega) \\ x_i \leq x}} \mathbf{P}([X = x_i]).$

► $\textcircled{C} : \forall x \in \mathbf{R}, F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du.$

P $\textcircled{C} : F' = f$ là où F est dérivable i.e. là où f est continue.

Pr ► $\textcircled{S} \textcircled{C} : \text{Dans le cas général } \lim_{-\infty} F = 0, \lim_{+\infty} F = 1, F \mathcal{C}^0 \text{ à droite en tout point de } \mathbf{R}, F \text{ non décroissante.}$

► **©** : On rajoute $F : \mathbb{C}^0$ sur \mathbb{R} et \mathbb{C}^1 sur $\mathbb{R} - I$ (I ensemble fini éventuellement vide).

Pr **©** : $\forall a \in \mathbb{R}, \mathbf{P}([X = a]) = F_X(a) - F_X(a^-)$.

► **©** : $\forall a \in \mathbb{R}, \mathbf{P}([X = a]) = 0$.

► **©©** : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a \leq b, \mathbf{P}([a \leq X \leq b]) = F_X(b) - F_X(a^-)$.

► **©©** : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a \leq b, \mathbf{P}([a < X \leq b]) = F_X(b) - F_X(a)$.

► **©©** : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a \leq b, \mathbf{P}([a \leq X < b]) = F_X(b^-) - F_X(a^-)$.

► **©©** : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a \leq b, \mathbf{P}([a < X < b]) = F_X(b^-) - F_X(a)$.

P **©** : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a \leq b, \mathbf{P}([a \leq X \leq b]) = \mathbf{P}([a < X \leq b]) = \mathbf{P}([a \leq X < b]) =$

$$\mathbf{P}([a < X < b]) = \int_a^b f_X(u) du.$$

$$\mathbf{P} \forall B \subset X(\Omega), \mathbf{P}(B) = \begin{cases} \text{©} \sum_{x_i \in B} \mathbf{P}([X = x_i]) \\ \text{©} \int_{x \in B} f(x) dx \end{cases}$$

Moments ©©

D **Espérance**

$$\mathbf{E}(X) = \begin{cases} \text{©} \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i \mathbf{P}([X = x_i]) \text{ ssr|cv} \\ \text{©} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \text{ ssr|cv} \end{cases}$$

P **©©** : $(\mathbf{E}(X) < 0) \iff (\mathbf{E}(|X|) < 0)$

D **Moment d'ordre où $r \geq 0$**

$$m_r(X) = \mathbf{E}(X^r) = \begin{cases} \text{©} \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i^r \mathbf{P}([X = x_i]) \text{ ssr|cv} \\ \text{©} \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x) dx \text{ ssr|cv} \end{cases}$$

P **©©** : $(m_2(X) = 0) \iff (X = \mathbf{E}(X) \text{ p.s.})$

R **©** Dans le cas continu, on pourrait se contenter de la convergence simple puisque l'intégrande ne change de signe qu'en 0, mais c'est une histoire de programme !

D **Moment absolu d'ordre où $r \geq 0$**

$$m_r(|X|) = \mathbf{E}(|X|^r) = \begin{cases} \text{©} \sum_{x_i \in X(\Omega)} |x_i|^r \mathbf{P}([X = x_i]) \text{ ssrcv} \\ \text{©} \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^r f(x) dx \text{ ssrcv} \end{cases}$$

R **©** Dans le cas continu, on pourrait se contenter de la convergence simple puisque l'intégrande ne change de signe qu'en 0, mais c'est une histoire de programme !

P **©©** : $(m_r(X) < 0) \iff (m_r(|X|) < 0)$

D **Moment centré d'ordre $r \geq 0$**

$$\mu_r(X) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))^r) = \begin{cases} \text{©} \sum_{x_i \in X(\Omega)} (x_i - \mathbf{E}(X))^r \mathbf{P}([X = x_i]) \text{ ssr|cv} \\ \text{©} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbf{E}(X))^r f(x) dx \text{ ssr|cv} \end{cases}$$

D $\mathbf{V}(X) = \mu_2(X)$.

P **©©** : $(\mathbf{V}(X) = 0) \iff (X = \mathbf{E}(X) \text{ p.s.})$

D **Moment factoriel d'ordre $r \geq 1$ ©** :

$$\mathbf{E}(X(X-1)\dots(X-r+1)) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i(x_i-1)\dots(x_i-r+1) \mathbf{P}([X = x_i])$$

ssr|cv|.

P **©©** : Soit $r \in \mathbb{N}$ alors $(m_{r+1}(X) < \infty) \implies (\forall k \in \llbracket 0, r \rrbracket, m_k(X) < \infty)$.

P **©©** : $(\mu_{r+1}(X) < \infty) \implies (\forall k \in \llbracket 0, r \rrbracket, \mu_k(X) < \infty)$.

P **©©** : $\forall r \in \mathbb{N}, (m_r(X) < \infty) \iff (\mu_r(X) < \infty)$.

Pr **Inégalités de moments ©©** :

► $\forall X \in \mathcal{L}^1, (X \geq 0) \implies (\mathbf{E}(X) \geq 0)$.

► $\forall (X, Y) \in (\mathcal{L}^1)^2, (X \leq Y) \implies (\mathbf{E}(X) \leq \mathbf{E}(Y))$.

► $\forall (X, Y) \in (\mathcal{L}^1)^2, (X = Y) \implies (\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y))$.

► $(\forall Y \in \mathcal{L}^1 \text{ et } X \text{ tel que } |X| \leq Y) \implies (X \in \mathcal{L}^1 \text{ et } \mathbf{E}(|X|) \leq \mathbf{E}(Y))$.

► $\forall X \in \mathcal{L}^1, |\mathbf{E}(X)| \leq \mathbf{E}(|X|)$.

► $\forall X \in \mathcal{L}^2, \mathbf{E}(X^2) \geq (\mathbf{E}(X))^2$.

D **Espérance conditionnelle ©** : $\forall A \in \mathcal{A} \mid \mathbf{P}(A) \neq 0$:

$$\mathbf{E}(X \mid A) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i \mathbf{P}_A([X = x_i]) \text{ sr|cv}.$$

Pr **©** : Soit X, Y, Z et T quatre variables discrètes, g une fonction de deux variables et a, b et c trois constantes réelles.

► $\mathbf{E}(c \mid [X = x]) = c$.

► $\mathbf{E}(aZ + bT \mid [X = x]) = a\mathbf{E}(Z \mid [X = x]) + b\mathbf{E}(T \mid [X = x])$ (**linéarité**).

► $\mathbf{E}(g(X, Y) \mid [X = x]) = \mathbf{E}(g(x, Y) \mid [X = x])$.

► $\mathbf{E}(Y \mid [X = x]) = \mathbf{E}(Y)$ et $\mathbf{E}(X \mid [Y = y]) = \mathbf{E}(X)$ lorsque X et Y sont **indépendantes**.

R : Ces propriétés restent valables en continu mais sont hors programme.

P **Formule de l'espérance totale ©** Soit $(A_i)_{i \in I}$ un SCE tq $\forall i \in I, \mathbf{P}(A_i) \neq 0, \mathbf{E}(X) = \sum_{i \in I} \mathbf{E}(X \mid A_i) \mathbf{P}(A_i)$ ssr|cv|.

P **Théorème de transfert**

$$\mathbf{E}(\varphi(X)) = \begin{cases} \textcircled{S} \sum_{x_i \in X(\Omega)} \varphi(x_i) \mathbf{P}([X = x_i]) \text{ ssr } |cv| \text{ où } \varphi \text{ déf sur } X(\Omega) \\ \textcircled{C} \int_a^b \varphi(x) f(x) dx \text{ ssr } |cv| \text{ où } \varphi \text{ est } \mathcal{C}^0 \text{ presque partout} \\ \text{avec } X(\Omega) = [a, b] \text{ p.p.} \end{cases}$$

$$\textcircled{D} \blacktriangleright \mathbf{V}(X) = \begin{cases} \textcircled{S} \sum_{x_i \in X(\Omega)} (x_i - \mathbf{E}(X))^2 \mathbf{P}([X = x_i]) \text{ ssr } |cv| \\ \textcircled{C} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbf{E}(X))^2 f(x) dx \text{ ssrcv} \end{cases}$$

$$\blacktriangleright \textcircled{S}\textcircled{C} : \sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}.$$

T Théorème de Huygens-Koenig $\textcircled{S}\textcircled{C} : \mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2$.

Pr $\textcircled{S}\textcircled{C} : \forall (a, b) \in \mathbf{R}^2, \mathbf{E}(aX + b) = a\mathbf{E}(X) + b$ et $\mathbf{V}(aX + b) = a^2\mathbf{V}(X)$.

VECTEURS ALÉATOIRES

Séries doubles

T Fubini dans le cas positif ($\mathbf{F}\oplus$) Soit $u = (u_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille à deux indices de réels positifs indexée par $I \times J \subset \mathbf{N}^2$. Si $\forall i \in I, \sum_j u_{i,j} < +\infty$ puis

$\sum_i \sum_j u_{i,j} < +\infty$ alors $\sum_{(i,j)} u_{i,j} < +\infty$. On a alors les résultats suivants : $\forall j \in J,$

$$\sum_i u_{i,j} < +\infty \text{ puis } \sum_j \sum_i u_{i,j} < +\infty \text{ et } \sum_{(i,j) \in I \times J} u_{i,j} = \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} u_{i,j} \right) = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} u_{i,j} \right).$$

P Comparaison pour les séries à termes positifs

\blacktriangleright Soit $I' \subset I$ et $J' \subset J$ et deux séries $\sum_{(i,j)} u_{i,j}$ et $\sum_{(i,j)} v_{i,j}$ tel que $\forall (i,j) \in I' \times J',$

$$0 \leq v_{i,j} \leq u_{i,j}. \text{ Alors } \left(\sum_{(i,j)} u_{i,j} \text{ cv} \right) \Rightarrow \left(\sum_{(i,j)} v_{i,j} \text{ cv} \right).$$

\blacktriangleright Par contraposée $\left(\sum_{(i,j)} v_{i,j} \text{ div} \right) \Rightarrow \left(\sum_{(i,j)} u_{i,j} \text{ div} \right).$

P Sommation par paquets (admis) Soit $\sum_{i,j} |u_{i,j}| < +\infty$ où $(i,j) \in I \times J$, et $(A_k)_{k \in K}$ une partition de $I \times J$, alors on a : $\forall k \in K, \sum_{(i,j) \in A_k} |u_{i,j}| < +\infty$ où $(i,j) \in A_k$ est

$$\text{somme } \sum_{(i,j) \in A_k} |u_{i,j}|, \text{ et } \sum_k \left(\sum_{(i,j) \in A_k} |u_{i,j}| \right) < +\infty.$$

$$\text{Enfin on a } \sum_{k \in K} \left(\sum_{(i,j) \in A_k} u_{i,j} \right) = \sum_{(i,j) \in I \times J} u_{i,j}.$$

Couples discrets

D Loi de probabilité d'un couple Soit $C = (X, Y)$. $P_C : X(\Omega) \times Y(\Omega) \rightarrow [0, 1]$, définie par $\forall (x_i, y_j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), P_C(x_i, y_j) = \mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = p_{i,j}$.

D Lois marginales $\blacktriangleright P_X : X(\Omega) \rightarrow [0, 1]$, définie par $\forall x_i \in X(\Omega), P_X(x_i) = \mathbf{P}([X = x_i])$ et

$\blacktriangleright P_Y : Y(\Omega) \rightarrow [0, 1]$, définie par $\forall y_j \in Y(\Omega), P_Y(y_j) = \mathbf{P}([Y = y_j])$.

P Lois marginales $\blacktriangleright \forall x_i \in X(\Omega), \mathbf{P}([X = x_i]) = p_{i\bullet} = \sum_{y_j \in Y(\Omega)} p_{i,j}$ et

$\blacktriangleright \forall y_j \in Y(\Omega), \mathbf{P}([Y = y_j]) = p_{\bullet j} = \sum_{x_i \in X(\Omega)} p_{i,j}$.

D Lois conditionnelles

$\blacktriangleright \mathbf{P}_{[X=x_i]} : Y(\Omega) \rightarrow [0, 1]$, définie par $\forall y_j \in Y(\Omega), \mathbf{P}_{[X=x_i]}([Y = y_j]) = \frac{p_{i,j}}{p_{i\bullet}}$ et

$\blacktriangleright \mathbf{P}_{[Y=y_j]} : X(\Omega) \rightarrow [0, 1]$, définie par $\forall x_i \in X(\Omega), \mathbf{P}_{[Y=y_j]}([X = x_i]) = \frac{p_{i,j}}{p_{\bullet j}}$.

P Caractérisation de la loi d'une fonction d'un couple Notons $Z = g(X, Y)$. Caractériser la loi de la variable Z , c'est donner $Z(\Omega) = g(X, Y)(\Omega)$ et pour tout $z \in Z(\Omega) : \mathbf{P}([Z = z]) = \sum_{\substack{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ g(x,y) = z}} \mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y])$.

P $\forall I \in \mathcal{P}(Z(\Omega)) : \mathbf{P}([Z \in I]) = \sum_{\substack{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ g(x,y) \in I}} \mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y])$.

T \textcircled{S} Théorème de transfert Soit φ définie sur $\mathcal{D} \supset X(\Omega) \times Y(\Omega)$,

$\mathbf{E}(\varphi(X, Y)) = \sum_{(x_i, y_j) \in (X, Y)(\Omega)} \varphi(x_i, y_j) \mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j])$ ssr|cv| de la série double en jeu.

P \textcircled{S} Droite de régression de Y en X notée Δ a pour équation :

$$\hat{Y} = \left(\frac{\text{Cov}(X, Y)}{\mathbf{V}(X)} \right) (X - \mathbf{E}(X)) + \mathbf{E}(Y) \text{ et en inversant les rôles symétriques de } X \text{ et } Y$$

nous obtenons $\hat{X} = \left(\frac{\text{Cov}(X, Y)}{\mathbf{V}(Y)} \right) (Y - \mathbf{E}(Y)) + \mathbf{E}(X)$ qui est l'équation de la droite de régression de X en Y notée Δ' .


R Ces équations de droite restent valables en continu mais sont hors programme.

Vecteurs discrets

D Loi d'un vecteur de dimension $n \geq 2$ Soit $V = (X_1, \dots, X_n)$ $P_V : X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega) \rightarrow [0, 1]$, définie par $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n X_i(\Omega)$,

$$P_V(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{P} \left(\bigcap_{i=1}^n [X_i = x_i] \right).$$

D **Lois marginales de dimension un** : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P_{X_k} : X_k(\Omega) \rightarrow [0, 1]$, déf. par $\forall x_k \in X_k(\Omega)$, $P_{X_k}(x_k) = \mathbf{P}([X_k = x_k])$.

R  Contrairement à ce que l'on pourrait croire les lois marginales d'un vecteur de dimension n ne sont pas uniquement de dimension. Elles peuvent être de dimension deux, trois etc ... (à méditer !).

P $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\forall x_k \in X_k(\Omega)$,

$$\mathbf{P}([X_k = x_k]) = \sum_{(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \in \prod_{m \in \llbracket 1, n \rrbracket - \{k\}} X_m(\Omega)} \mathbf{P}\left(\bigcap_{j=1}^n [X_j = x_j]\right).$$

T **Théorème de transfert** Soit $V = (X_1, \dots, X_n)$ alors $\mathbf{E}(\varphi(X_1, \dots, X_n)) = \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)} \varphi(x_1, \dots, x_n) \mathbf{P}([X_1 = x_1] \cap \dots \cap [X_n = x_n])$ srr|cv|.

P **Caractérisation de la loi d'une fonction d'un vecteur** Soit $V = (X_1, \dots, X_n)$ et φ une fonction définie sur une partie de \mathbf{R}^n contenant $\prod_{k=1}^n X_k(\Omega)$, alors la loi de $Z = \varphi(V)$ est caractérisée par la donnée de $Z(\Omega) \subset \text{Im } \varphi$ et par celles de

$$\mathbf{P}([Z = z]) = \sum_{\substack{(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega) \\ \varphi(x_1, \dots, x_n) = z}} \mathbf{P}([X_1 = x_1] \cap \dots \cap [X_n = x_n]) \text{ pour tout } z$$

de $Z(\Omega)$.

Covariance

D $\textcircled{S}\textcircled{C}$ Soit $X, Y \in \mathcal{L}^2$, $\text{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))(Y - \mathbf{E}(Y)))$.

Pr $\textcircled{S}\textcircled{C}$: Soit $(X, Y) \in (\mathcal{L}^2)^2$,

► $\text{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$ (théorème de Huygens).

► $\text{Cov}(X, X) = \mathbf{V}(X) \geq 0$ (positivité).

► $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$ (symétrie).

► Soit $(X, Y, Z) \in (\mathcal{L}^2)^3$, $\forall (a, b) \in \mathbf{R}^2$, $\text{Cov}(aX + bY, Z) = a \text{Cov}(X, Z) + b \text{Cov}(Y, Z)$ (linéarité à gauche).

► Soit $(X, Y) \in (\mathcal{L}^2)^2$ et $\forall (a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$, $\text{Cov}(aX + b, cY + d) = ac \text{Cov}(X, Y)$.

► $\forall k, \forall l, X_k$ et $Y_l \in \mathcal{L}_d^2$, λ_k et $\mu_l \in \mathbf{R}$,

$$\text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i, \sum_{j=1}^m \mu_j Y_j\right) = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, m \rrbracket} \lambda_i \mu_j \text{Cov}(X_i, Y_j) \text{ (bilinéarité)}.$$

! ► La covariance ne définit pas en général un produit scalaire, sauf si l'on se réduit aux variables de \mathcal{L}^2 qui sont centrées et en assimilant variable nulle p.s. et variables nulles.

P **Produit scalaire dans \mathcal{L}^2** (HP mais déjà tombé) L'application $\varphi : (X, Y) \in$

¹Cela veut dire de variances non nulles.

$(\mathcal{L}^2)^2 \mapsto \varphi(X, Y) = \mathbf{E}(XY)$ définit un produit scalaire dans \mathcal{L}^2 en assimilant variable nulle p.s. et variables nulles.

Pr $\textcircled{S}\textcircled{C}$: $\forall (X, Y) \in (\mathcal{L}^2)^2$, $\forall (a, b) \in \mathbf{R}^2$,

$\mathbf{V}(aX + bY) = a^2 \mathbf{V}(X) + b^2 \mathbf{V}(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y)$. La généralisation a disparu du programme 2014 !

P **(Identités de polarisation)** $\textcircled{S}\textcircled{C}$: Soit $(X, Y)^2 \in (\mathcal{L}_d^2)^2$ alors :

► $\mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) = \frac{1}{2}(\mathbf{V}(X + Y) + \mathbf{V}(X - Y))$.

► $\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{4}(\mathbf{V}(X + Y) - \mathbf{V}(X - Y))$.

► $\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{2}(\mathbf{V}(X + Y) - \mathbf{V}(X) - \mathbf{V}(Y))$.

► $\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{2}(\mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) - \mathbf{V}(X - Y))$.

P Soit $(X_1, \dots, X_n) \in (\mathcal{L}_d^2)^n$ indépendantes, alors $\mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{V}(X_i)$. 

Réciproque fausse.

D $\textcircled{S}\textcircled{C}$: Soit $X, Y \in \mathcal{L}^2 \not\vdash \delta^1 : \rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbf{V}(X)\mathbf{V}(Y)}}$.

Pr ► $\textcircled{S}\textcircled{C}$: Soit $X, Y \in \mathcal{L}^2 \not\vdash \delta : |\rho(X, Y)| \leq 1$ soit $|\text{Cov}(X, Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y)$ (**Inégalité de Cauchy-Schwarz**).

► $\textcircled{S}\textcircled{C} : (|\rho(X, Y)| = 1) \Leftrightarrow (Y = aX + b \text{ p.s.})$.

D **Matrice de covariance-variance** $\textcircled{S}\textcircled{C}$: Soit pour tout k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, $X_k \in \mathcal{L}_d^2$, on appelle *matrice de covariance-variance du vecteur aléatoire* $V = (X_1, \dots, X_n)$ la *matrice symétrique réelle* de $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ notée Γ_V définie par : $\Gamma_V = (\text{Cov}(X_i, X_j))_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$.

R $\textcircled{S}\textcircled{C}$: La matrice de covariance associée à un vecteur nous donne une idée de la *dispersion du vecteur*.

P ► $\textcircled{S}\textcircled{C}$: Si les variables X_i sont indépendantes, Γ_V est diagonale car les diverses covariances sont nulles.

► $\textcircled{S}\textcircled{C} : \forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = {}^t (a_1 \dots a_n) \Gamma_V \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \geq 0$. La

forme quadratique associée à Γ_V qui montre que la matrice Γ_V est positive et donc ses valeurs propres sont positives ou nulles.


Indépendance

D ► \textcircled{S} : $X_1 \perp \dots \perp X_n$, lorsque $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n X_i(\Omega)$, $\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i = x_i]\right) =$

$$\prod_{i=1}^n \mathbf{P}([X_i = x_i]).$$

► **Ⓢⓐ** : $X_1 \perp \dots \perp X_n$ lorsque $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$,

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i \leq x_i]\right) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}([X_i \leq x_i]).$$


Ⓟ ► **Ⓢⓐ** : $(X \perp Y) \Rightarrow (\forall (\varphi, \psi), \varphi(X) \perp \psi(Y))$  Réciproque fausse..


► **Ⓢⓐ** : $\forall (X_1, X_2, \dots, X_n) \in (\mathcal{L}^1)^n, (X_1 \perp X_2 \dots \perp X_n) \Rightarrow (\mathbf{E}\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) < \infty$ et

$$\mathbf{E}\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) = \prod_{i=1}^n \mathbf{E}(X_i).$$


► **Ⓢⓐ** : $\forall (X, Y) \in (\mathcal{L}^2)^2, (X \perp Y) \Rightarrow (\text{Cov}(X, Y) = 0).$

► **Ⓢⓐ** : $\forall (X, Y) \in (\mathcal{L}^2)^2, (\text{Cov}(X, Y) \neq 0) \Rightarrow \text{non}(X \perp Y).$

► **Ⓢⓐ** :  $\forall (X, Y) \in (\mathcal{L}^2)^2 (\text{Cov}(X, Y) = 0) \Rightarrow ?$

► **Ⓢⓐ** : $\forall (X, Y) \in (\mathcal{L}^2)^2, (X \perp Y) \Rightarrow (\rho(X, Y) = 0)$  Réciproque fausse en général (sauf si les deux variables sont au plus binaires ou gaussiennes HP).

► **Ⓢⓐ** : $\forall (X, Y) \in (\mathcal{L}^2)^2, (\rho(X, Y) \neq 0) \Rightarrow \text{non}(X \perp Y).$

► **Ⓢⓐ** :  $\forall (X, Y) \in (\mathcal{L}^2)^2, (\rho(X, Y) = 0) \Rightarrow ?$

► **Ⓢ** : $(\forall (X, Y) \in (\mathcal{L}^1)^2 \text{ et } X \perp Y) \Rightarrow \left(\begin{cases} \mathbf{E}(X | [Y = y_j]) = \mathbf{E}(X) \\ \mathbf{E}(Y | [X = x_i]) = \mathbf{E}(Y) \end{cases}\right).$

► **Ⓢⓐ** : $\forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n, \forall (X_1, X_2, \dots, X_n) \in (\mathcal{L}^2)^n$ alors $(X_1 \perp \dots \perp X_n) \Rightarrow (\mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \mathbf{V}(X_i)).$

► **Ⓢⓐ** : **Lemme des coalitions** $(X_1 \perp \dots \perp X_{n+m}) \Rightarrow (\forall (\varphi, \psi), \varphi(X_1, \dots, X_n) \perp \psi(X_{n+1}, \dots, X_{n+m}))$ (on peut "bordéliser" comme on veut les variables aléatoires).

Ⓟ Convolution  ce théorème s'emploi dans le cas de variables indépendantes)

$$\text{► } \text{Ⓢ} (X \perp Y) \Rightarrow (\mathbf{P}([X + Y = z]) = \sum_{x \in \{z - x \in Y(\Omega)\}} \mathbf{P}([X = x]) \mathbf{P}([Y = z - x])).$$

$$\text{► } \text{ⓐ} (X \perp Y) \Rightarrow \left(f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x - t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x - t) f_Y(t) dt\right),$$

à condition que f_{X+Y} soit définie et \mathcal{C}^0 presque partout, ce qui est le cas si au moins l'une

de des deux densités est bornée et on note $f_{X+Y} = f_X * f_Y$.

INÉGALITÉS DE CONCENTRATION

Ⓟ Inégalité de Markov (I.M.) **Ⓢⓐ** :

► Soit $X \in \mathcal{L}^1$ à valeurs positives, alors $\forall \varepsilon > 0, \mathbf{P}([X \geq \varepsilon]) \leq \frac{\mathbf{E}(X)}{\varepsilon}.$

► Ce qui se généralise pour $\forall r > 0, X \in \mathcal{L}^r, \forall \varepsilon > 0, \mathbf{P}([|X| \geq \varepsilon]) \leq \frac{\mathbf{E}(|X|^r)}{\varepsilon^r}$ (**Inégalité de Markov à l'ordre r**).

Ⓟ Inégalité de Bienaymé-Tchebychev (I.B.T.) **Ⓢⓐ** : Soit $X \in \mathcal{L}^2$ admettant variance non nulle, alors $\forall \varepsilon > 0, \mathbf{P}([|X - \mathbf{E}(X)| \geq \varepsilon]) \leq \frac{\mathbf{V}(X)}{\varepsilon^2}.$

CONVERGENCES

Convergence en probabilité

Ⓟ **Ⓢⓐ** : $(X_n)_{n \in \mathbf{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ lorsque $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}([|X_n - X| \geq \varepsilon]) = 0$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}([|X_n - X| < \varepsilon]) = 1.$

Ⓟ ► **Ⓢⓐ** : $((X_n)_{n \in \mathbf{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} X) \Leftrightarrow ((X_n - X)_{n \in \mathbf{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0).$

► **Ⓢⓐ** : $((X_n)_{n \in \mathbf{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} X) \not\Leftrightarrow \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}(X_n) = \mathbf{E}(X) \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{V}(X_n - X) = 0\right).$

Ⓟ $\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}(X_n) = a \in \mathbf{R} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{V}(X_n) = 0\right) \Rightarrow ((X_n)_{n \in \mathbf{N}^*} \xrightarrow{\mathbf{P}} a).$

Ⓟ (Pas vraiment au pgme mais ...)

► **Ⓢⓐ** : $(|X_n|)_{n \in \mathbf{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0 \Leftrightarrow (X_n)_{n \in \mathbf{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0.$

► **Ⓢⓐ** : $(X_n)_{n \in \mathbf{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} X \text{ et } (X_n)_{n \in \mathbf{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} Y \Rightarrow (X = Y \text{ p.s.}).$

Ⓟ **Théorème de composition** **Ⓢⓐ** : Si $(X_n)_{n \in \mathbf{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ et si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R})$ (il est suffisant d'avoir $f \in \mathcal{C}^0(X(\Omega))$) alors $(f(X_n))_{n \in \mathbf{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} f(X).$

Ⓟ **Théorème de composition** **Ⓢⓐ** : Si $(X_n)_{n \in \mathbf{N}} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R})$ (il est suffisant d'avoir $f \in \mathcal{C}^0(X(\Omega))$) alors $(f(X_n))_{n \in \mathbf{N}} \xrightarrow{\mathcal{L}} f(X).$

Ⓟ (Pas vraiment au pgme mais ...) ► **Ⓢⓐ** : Si $(X_n)_{n \in \mathbf{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ et $(Y_n)_{n \in \mathbf{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} Y$ alors $\forall (a, b) \in \mathbf{R}^2, (aX_n + bY_n)_{n \in \mathbf{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} aX + bY.$

► $(X_n Y_n)_{n \in \mathbf{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} XY.$

► $\left(\frac{X_n}{Y_n}\right)_{n \in \mathbf{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} \frac{X}{Y}$ avec $\mathbf{P}([Y = 0]) = 0.$

T **Théorème de Slutsky** $\textcircled{S}\textcircled{C}$: $\left((X_n)_{n \in \mathbf{N}} \xrightarrow{\mathcal{L}} X \text{ et } (Y_n)_{n \in \mathbf{N}} \xrightarrow{\mathbf{P}} c \right) \implies \left((X_n + Y_n)_{n \in \mathbf{N}} \xrightarrow{\mathcal{L}} X + c \text{ et } (X_n Y_n)_{n \in \mathbf{N}} \xrightarrow{\mathcal{L}} cX \right)$

T **Loi faible des grands nombres**

► $\textcircled{S}\textcircled{C}$: Soit $(X_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$ une suite de variables indépendantes, d'espérance commune m et de variance commune σ^2 . Soit $\overline{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ alors $(\overline{X}_n)_{n \in \mathbf{N}^*} \xrightarrow{\mathbf{P}} m$.

► \textcircled{S} : Si $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ alors en posant $F_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ on a : $\forall \varepsilon > 0$,

$$\mathbf{P}(\{|F_n - p| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

Convergence en loi

D $\textcircled{S}\textcircled{C}$: $(X_n)_{n \in \mathbf{N}} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ en tout point où F_X est \mathcal{C}^0 sur une partie de \mathbf{R} .

P $\textcircled{S}\textcircled{C}$: Soit a et b deux réels tel que $a < b$ on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}([a < X_n \leq b]) = \mathbf{P}([a < X \leq b])$.

P \textcircled{S} : $\left((X_n)_{n \in \mathbf{N}} \xrightarrow{\mathcal{L}} X \right) \Leftrightarrow \left(\forall k \in \mathbf{Z}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}([X_n = k]) = \mathbf{P}([X = k]) \right)$ avec les variables X_n et X à valeurs dans \mathbf{Z}

T **Théorème de la limite centrée (TCL)**

► $\textcircled{S}\textcircled{C}$: Soit $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ i.i.d. alors $(S_n^*)_{n \in \mathbf{N}^*} \xrightarrow{\mathcal{L}} N$ où $N \hookrightarrow N(0, 1)$ où $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, et $S_n^* = \frac{S_n - \mathbf{E}(S_n)}{\sigma(S_n)}$ où $\sigma(S_n) > 0$.

$$\text{Alors } \forall x \in \mathbf{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}([S_n \leq x]) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt.$$

► Le TCL existe aussi en version moyenne.

P $\textcircled{S}\textcircled{C}$: $\forall a \in \mathbf{R}, \left((X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} a \right) \implies \left((X_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} a \right)$.

Approximations

P **(Binomiale par Poisson)** $\forall n \in \mathbf{N}, X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} np_n = \lambda, \lambda > 0$, alors $(X_n)_{n \in \mathbf{N}} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ où $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ (conditions : $n \geq 30, p \leq 0, 1$).

P **(Binomiale par normale)** $\forall n \in \mathbf{N}^*, X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, ainsi $S_n = \sum_{k=1}^n X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. Alors $(S_n^*)_{n \in \mathbf{N}^*} \xrightarrow{\mathcal{L}} N$ où $N \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ avec $\forall n \in \mathbf{N}^*, S_n^* = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ (conditions : $n \geq 30, np \geq 5$ et $nq \geq 5$).

P **(Poisson par normale)** $\forall n \in \mathbf{N}, X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} np_n = \lambda, \lambda > 0$, alors $(X_n)_{n \in \mathbf{N}} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ où $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ (condition : $\lambda \geq 15$).

ESTIMATIONS

Estimation ponctuelle Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et θ un réel de Θ une partie de \mathbf{R} et $g : \Theta \rightarrow \mathbf{R}$.

D Soit (X_1, X_2, \dots, X_n) un n -éch d'une var X i.i.d., on appelle **statistique** ou **estimateur de $g(\theta)$** , toute suite de variables $(T_n)_n$ où $\forall n, T_n = \varphi_n(X_1, X_2, \dots, X_n)$, fonction de X_1, X_2, \dots, X_n indépendante de θ . C'est une variable aléatoire réelle.

D On dit que $(T_n)_n$ est **convergent** ou **consistant** de $g(\theta)$ lorsque $(T_n)_n \xrightarrow{\mathbf{P}} g(\theta)$.

D **Biais d'un estimateur par rapport à $g(\theta)$** : $b_\theta(T_n) = \mathbf{E}_\theta(T_n - g(\theta))$.

► Si $b_\theta(T_n) = 0$, on dit que l'**estimateur est sans biais**.

► Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_\theta(T_n) = 0$, on dit que l'**estimateur est asymptotiquement sans biais**.

P $\textcircled{S}\textcircled{C}$: Si $b_\theta(T_n) = 0$ soit si $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_\theta(T_n) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{V}_\theta(T_n) = 0$ alors (T_n) est convergent soit $(T_n)_n \xrightarrow{\mathbf{P}} g(\theta)$.

D On appelle **risque quadratique moyen** de T_n : $r_\theta(T_n) = \mathbf{E}_\theta \left((T_n - g(\theta))^2 \right)$.

P $\textcircled{S}\textcircled{C}$: $r_\theta(T_n) = \mathbf{V}_\theta(T_n) + (b_\theta(T_n))^2$.

P $\textcircled{S}\textcircled{C}$: $\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} r_\theta(T_n) = 0 \right) \implies \left((T_n)_n \xrightarrow{\mathbf{P}} g(\theta) \right)$.

Estimateurs de paramètres usuels sans biais et convergents

Moyenne empirique Soit n un entier naturel non nul, μ un réel inconnu que l'on cherche à estimer et σ strictement positif.

D $\textcircled{S}\textcircled{C}$: $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ où le n -échantillon est tel que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbf{E}(X_k) = \mu$ inconnue.

P $\textcircled{S}\textcircled{C}$: $\mathbf{E}(\overline{X}_n) = \mu$ et $\mathbf{V}(\overline{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$ où μ est un réel et

P ► \textcircled{C} : $(\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, X_k \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)) \implies \left(\overline{X}_n \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \right)$ où μ est un réel et σ strictement positif.

► $\textcircled{S}\textcircled{C}$: $(\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, X_k \not\hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ voire de loi commune inconnue) $\implies \left(\overline{X}_n \underset{\simeq}{\hookrightarrow} \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \right)$ par le TCL pour n grand, où μ est un réel et σ strictement positif.

P $\textcircled{S}\textcircled{C}$: $(\overline{X}_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} \mu$.

Fréquence empirique Soit $n \in \mathbf{N}^*, p$ et q deux réels de $]0, 1[$ inconnus donc à

estimer, tel que $p + q = 1$.

D \textcircled{S} : $F_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ où le n - échantillon est tel que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ où p

est inconnu.

P $\mathbf{E}(F_n) = p$ et $\mathbf{V}(F_n) = \frac{pq}{n}$.

P \textcircled{S} : $\overline{X}_n \underset{\approx}{\hookrightarrow} \mathcal{N}\left(p, \frac{pq}{n}\right)$ par le **TCL** pour n grand, $np \geq 5$ et $nq \geq 5$.

P \textcircled{S} : $(F_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} p$

Variance empirique Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et θ un réel de Θ une partie de \mathbf{R} .

D $\textcircled{S}\textcircled{C}$: $S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \overline{X}_n)^2$ où le n - échantillon est tel que $\forall k$, $\mathbf{E}(X_k) = m$

connue et $\mathbf{V}(X_k) = \sigma^2$ inconnue.

P $\textcircled{S}\textcircled{C}$: $S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^2 - (\overline{X}_n)^2$.

P $\textcircled{S}\textcircled{C}$: $\mathbf{E}(S_n^2) = \left(\frac{n-1}{n}\right) \sigma^2$.

P $\textcircled{S}\textcircled{C}$: $\left(\frac{n}{n-1} S_n^2\right) \xrightarrow{\mathbf{P}} \sigma^2$.

Estimation par intervalle de confiance de $g(\theta)$ au risque α , (noté $IC_\alpha(\theta)$)

D L'intervalle aléatoire $[U_n, V_n]$ est un **intervalle de confiance de $g(\theta)$ au niveau $1 - \alpha$** si $\mathbf{P}([U_n, V_n] \ni g(\theta)) \geq 1 - \alpha$ autrement dit si $\mathbf{P}([U_n \leq g(\theta) \leq V_n]) \geq 1 - \alpha$ (α est appelé le **risque**).

P $IC_\alpha(p) = \left[F_n - u_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}} ; F_n + u_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}} \right]$ et $IC_\alpha(p) \subset \left[F_n - \frac{u_{1-\alpha/2}}{2\sqrt{n}} ; F_n + \frac{u_{1-\alpha/2}}{2\sqrt{n}} \right]$ (condition $\min(nu_n, nv_n, n(1-u_n), n(1-v_n)) \geq 5$).

P $\textcircled{S}\textcircled{C}$: $IC_\alpha(\mu) = \left[\overline{X}_n - u_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \overline{X}_n + u_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$ (condition $n \geq 30$). Si σ est inconnu, l'estimer par la réalisation de $\sqrt{\frac{n}{n-1}} S_n$ noté s ce qui donne : $IC_\alpha(\mu) =$

$\left[\overline{X}_n - u_{1-\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} ; \overline{X}_n + u_{1-\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$.

ZOOLOGIE DES LOIS USUELLES DU PROGRAMME

Les lois sont classées par ordre alphabétique.

Loi de Bernoulli \textcircled{S}

► **Notation** : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$

► **Paramètre** : $p \in]0, 1[$

► **Epreuve type** : épreuve amenant deux issues seulement : succès ou échec.

²Une épreuve de Bernoulli est une épreuve à deux issues seulement.

► $X(\Omega) = \{0, 1\}$

► $\mathbf{P}([X = 0]) = 1 - p$; $\mathbf{P}([X = 1]) = p$

► $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - p & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

► $\mathbf{E}(X) = p$

► $\mathbf{V}(X) = p(1 - p)$

► $(X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)) \iff (1 - X \hookrightarrow \mathcal{B}(1 - p))$

► $(X \hookrightarrow \mathcal{B}(1, p)) \iff (X \hookrightarrow \mathcal{B}(p))$

► X_1, X_2, \dots, X_n **i.i.d.** | ($\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$) $\implies \left(\sum_{k=1}^n X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p) \right)$

Variable indicatrice \textcircled{S}

D $\forall A \in \mathcal{A}$, $\mathbf{1}_A = \begin{cases} 1 & \text{si } A \\ 0 & \text{si } \overline{A} \end{cases}$.

Par définition une variable indicatrice est donc une variable de Bernoulli.

Pr ► $\forall A \in \mathcal{A}$, $\mathbf{E}(\mathbf{1}_A) = \mathbf{P}(A)$, $\mathbf{V}(\mathbf{1}_A) = \mathbf{P}(A)(1 - \mathbf{P}(A))$.

► $\mathbf{1}_\Omega = 1$.

► $\mathbf{1}_\emptyset = 0$.

► $\mathbf{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbf{1}_A$.

► $\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$ (cela se généralise au cas de n événements par récurrence).

► $\forall n \geq 1$, $(\mathbf{1}_A)^n = \mathbf{1}_A$.

► $\mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$ (cela se généralise au cas de n événements par récurrence).

► $\mathbf{1}_{A \Delta B} = |\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B|$.

Loi binomiale \textcircled{S}

► **Notation** : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$

► **Paramètres** : $n \in \mathbf{N}^*$, $p \in]0, 1[$

► **Epreuve type** : succession de n épreuves de **Bernoulli² indépendantes** et de **même paramètre p** .

► $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$

► $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\mathbf{P}([X = k]) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$

► $\mathbf{E}(X) = np$

► $\mathbf{V}(X) = np(1 - p)$

► $(X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)) \iff (n - X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1 - p))$

► $(X \hookrightarrow \mathcal{B}(1, p)) \iff (X \hookrightarrow \mathcal{B}(p))$

► X_1, X_2, \dots, X_n **i.i.d.** | ($\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$) $\implies \left(\sum_{k=1}^n X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p) \right)$

► $\mathcal{B}(n_1, p) * \dots * \mathcal{B}(n_l, p) \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\sum_{k=1}^l n_k, p\right)$ (**stabilité** de la loi binomiale pour la somme de variables indépendantes)

Loi de Dirac (S)

► **Notation** : $X \hookrightarrow \delta_c$
 ► **Paramètre** : $c \in \mathbb{R}$
 ► **Epreuve type** : numéro associée à une boule tirée d'une urne ne contenant que des boules ayant le même numéro c .

- $X(\Omega) = \{c\}$
- $\mathbf{P}([X = c]) = 1$
- $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < c \\ 1 & \text{si } x \geq c \end{cases}$
- $\mathbf{E}(X) = c$
- $\mathbf{V}(X) = 0$
- $(\mathbf{V}(X) = 0) \Leftrightarrow (X \hookrightarrow \delta_c)$
- $(\mathbf{E}(X^2) = 0) \Leftrightarrow (X \hookrightarrow \delta_0)$

Loi exponentielle (C)

► **Notation** : $X \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)$
 ► **Paramètre** : $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$
 ► **Epreuve type** : temps d'attente entre deux phénomènes indépendants tels que des arrivées à un guichet, ou des appels téléphoniques.

- $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$ p.s.
- $f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$
- $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$
- $\mathbf{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$
- $\mathbf{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
- $(X \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)) \Leftrightarrow (\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2, \mathbf{P}_{[X > x]}([X > x + y]) = \mathbf{P}([X > y]))$ (**absence de mémoire**) ce qui s'est passé sur l'intervalle $]-\infty, x]$ n'affecte en rien ce qui se passera sur l'intervalle $]x, x + y]$.

$$\forall a > 0, (X \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)) \Leftrightarrow \left(aX \hookrightarrow \varepsilon\left(\frac{\lambda}{a}\right)\right)$$

► Soit $X \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \varepsilon(\mu)$ deux variables indépendantes, alors :

- ◆ $\mathbf{P}([X \leq Y]) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$ (hors programme mais ...)
- ◆ $\mathbf{P}([Y \leq X]) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$ (hors programme mais ...)

$$\diamond \mathbf{P}([X = Y]) = 0$$

$$\diamond \inf(X, Y) \hookrightarrow \varepsilon(\lambda + \mu) \text{ (hors programme mais ...)}$$

$$\triangleright \varepsilon(\lambda) = \Gamma\left(\frac{1}{\lambda}, 1\right) \text{ (hors programme mais ...)}$$

$$\triangleright \underbrace{\varepsilon(\lambda) * \dots * \varepsilon(\lambda)}_{n \text{ fois}} = \Gamma\left(\frac{1}{\lambda}, n\right) \text{ (hors programme mais ...)}$$

► Soit $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda x)$ et $X \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)$ alors $\mathbf{P}([X > x]) = \mathbf{P}([Y = 0])$

► Si $X \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)$ alors $\lfloor X \rfloor \hookrightarrow \mathcal{G}_{\mathbf{N}}(p)$ (hors programme mais ...)

Loi gamma (C)

► **Notation** : $X \hookrightarrow \gamma(t)$

► **Paramètre** : $t \in \mathbb{R}_+^*$

► $X(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$ p.s.

$$\triangleright \forall x \in \mathbb{R}, f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{e^{-x} x^{t-1}}{\Gamma(t)} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\triangleright \mathbf{E}(X) = t$$

$$\triangleright \mathbf{V}(X) = t$$

► $\gamma(t) = \Gamma(1, t)$ (hors programme mais ...)

$$\triangleright \gamma(t) = \varepsilon(1)$$

$$\triangleright \underbrace{\gamma(t_1) * \dots * \gamma(t_n)}_{n \text{ fois}} = \gamma\left(\sum_{k=1}^n t_k\right)$$

Loi géométrique (S)

► **Notation** : $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$

► **Paramètre** : $p \in]0, 1[$

► **Epreuve type** : c'est le rang d'apparition du premier succès lors d'une **succession illimitée** d'épreuves de Bernoulli.

$$\triangleright X(\Omega) = \mathbb{N}^*$$

$$\triangleright \forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}([X = k]) = q^{k-1}p \text{ avec } q = 1 - p$$

$$\triangleright \forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - q^k & \text{si } x \in [k, k + 1[, \quad k \in \mathbb{N}^* \text{ avec } q = 1 - p \end{cases}$$

$$\triangleright \mathbf{E}(X) = \frac{1}{p}$$

$$\triangleright \mathbf{V}(X) = \frac{q}{p^2} \text{ avec } q = 1 - p$$

► $(X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)) \Leftrightarrow (\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \mathbf{P}_{[X > n]}([X > m + n]) = \mathbf{P}([X > m]))$ (**absence de mémoire**) ce qui s'est passé sur l'intervalle $]-\infty, n]$ n'affecte en rien ce qui se passera sur l'intervalle $]n, n + m]$.

► $\underbrace{\mathcal{G}(p) * \dots * \mathcal{G}(p)}_{n \text{ fois}} = \mathcal{P}(r, p)$ (loi de Pascal) (Hors programme mais ...)

Loi normale centrée et réduite ou de Laplace-Gauss ©

► **Notation :** $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$

► **Paramètres :** 0 et 1

► $X(\Omega) = \mathbb{R}$ p.s.

► $\forall x \in \mathbb{R}, f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

► **Intégrale de Gauss**

$$\diamond \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = 1$$

$$\diamond \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

► **Fonction de répartition**

$$\diamond \forall x \in \mathbb{R}, \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt \text{ (intégrale tabulée)}$$

$$\diamond \forall x \in \mathbb{R}, \Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \text{ (ie } \Phi - \frac{1}{2} \text{ est impaire)}$$

$$\diamond \Phi(0) = 1/2$$

► **Mode :** 0

► **Médiane :** 0

► **E(X) = 0**

► **V(X) = 1**

$$\diamond \mathbf{E}(X^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \in 2\mathbb{N} + 1 \\ \frac{(2m)!}{2^m m!} & \text{si } n = 2m \in 2\mathbb{N} \end{cases} \text{ (à retrouver !)}$$

$$\diamond \left(\frac{X-m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1) \right) \Leftrightarrow (X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2))$$

► **Stabilité de la loi normale pour la somme de variables indépendantes**

$$\diamond \underbrace{\mathcal{N}(0, 1) * \dots * \mathcal{N}(0, 1)}_{n \text{ fois}} = \mathcal{N}(0, n)$$

$$\diamond \underbrace{\mathcal{N}(m, \sigma^2) * \dots * \mathcal{N}(m, \sigma^2)}_{n \text{ fois}} = \mathcal{N}(nm, n\sigma^2)$$

$$\diamond X_1, X_2, \dots, X_n \text{ i.i.d. } | (\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, X_k \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)) \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^n X_k^2 \hookrightarrow \Gamma(2, n/2) \right)$$

(hors programme mais ...)

► **Approximations :**

$$\diamond \left(\begin{cases} X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p) \\ n \geq 30 \quad np \geq 5 \quad n(1-p) \geq 5 \end{cases} \right) \Rightarrow \left(X \underset{\approx}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(np, np(1-p)) \right)$$

$$\diamond \left(\begin{cases} X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda) \\ \lambda \geq 15 \end{cases} \right) \Rightarrow \left(X \underset{\approx}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(\lambda, \lambda) \right)$$

Loi normale quelconque ou de Laplace-Gauss ©

► **Notation :** $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

► **Paramètres :** $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+^*$

► $X(\Omega) = \mathbb{R}$ p.s.

$$\diamond \forall x \in \mathbb{R}, f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$

► **Mode :** m

► **Médiane :** m

► **E(X) = m**

► **V(X) = σ^2**

► $(X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)) \Leftrightarrow \left(\frac{X-m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1) \right)$ (théorème fondamental de la loi normale)

(ramble)

► $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2) * \dots * \mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2) = \mathcal{N}\left(\sum_{k=1}^n m_k, \sum_{k=1}^n \sigma_k^2\right)$ (**stabilité** de la loi normale pour la **somme** de variables **indépendantes**)

► **Approximations :**

$$\diamond \left(\begin{cases} X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p) \\ n \geq 30 \quad np \geq 5 \quad n(1-p) \geq 5 \end{cases} \right) \Rightarrow \left(X \underset{\approx}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(np, np(1-p)) \right)$$

$$\diamond \left(\begin{cases} X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda) \\ \lambda \geq 15 \end{cases} \right) \Rightarrow \left(X \underset{\approx}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(\lambda, \lambda) \right)$$

$$\diamond \left((X_n)_{n \geq 1} \text{ i.i.d.} \right) \Rightarrow \left(\left(\frac{\sum_{k=1}^n X_k - \mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)}{\sigma\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)} \right)_{n \geq 1} \xrightarrow{\mathcal{L}} N \text{ où } N \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1) \right)$$

(TCL)

Loi de Poisson ©

► **Notation :** $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$

► **Paramètre :** $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$

► **Epreuve type :** nombre d'apparitions d'un phénomène rare durant un intervalle de temps donné.

► $X(\Omega) = \mathbb{N}$

$$\diamond \forall k \in \mathbb{N}, \mathbf{P}([X = k]) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

► **E(X) = λ**

► **V(X) = λ**

► $\mathcal{P}(\lambda_1) * \dots * \mathcal{P}(\lambda_n) = \mathcal{P}\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k\right)$ (**stabilité** de la loi de Poisson pour la **somme**

de variables **indépendantes**)

► $\mathbf{P}([X = 0]) = 1 - F_Y(1)$ où $Y \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)$

► Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda x)$ et $Y \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)$ alors $\mathbf{P}([X > x]) = \mathbf{P}([Y = 0])$

► **Approximations :**

$$\blacklozenge \left(\left\{ \begin{array}{l} X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda) \\ \lambda \geq 15 \end{array} \right\} \Rightarrow \left(X \underset{\simeq}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(\lambda, \lambda) \right)$$

$$\blacklozenge (X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p) \text{ et } n \geq 30, p < 0.1) \Rightarrow \left(X \underset{\simeq}{\hookrightarrow} \mathcal{P}(np) \right)$$

Loi uniforme continue ③

► **Notation :** $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$

► **Paramètre :** $[a, b]$ où $a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}, a < b$.

► $X(\Omega) = [a, b]$ p.s.

$$\blacktriangleright \forall x \in \mathbf{R}, f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{si } x > b \end{cases}$$

$$\blacktriangleright \forall x \in \mathbf{R}, F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

$$\blacktriangleright \mathbf{E}(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$\blacktriangleright \mathbf{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\blacktriangleright (X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])) \Leftrightarrow ((b-a)X + a \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b]))$$

$$\blacktriangleright (X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])) \Rightarrow \left(-\frac{1}{\lambda} \ln X \hookrightarrow \varepsilon(\lambda) \right)$$

Loi uniforme discrète ④

► **Notation :** $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ $n \geq 1$

► **Paramètre :** $\llbracket 1, n \rrbracket$

► **Epreuve type :** numéro d'une boule tirée d'une urne constituée de boules numérotées de 1 à n .

$$\blacktriangleright X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$$

$$\blacktriangleright \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbf{P}([X = k]) = \frac{1}{n}$$

$$\blacktriangleright \mathbf{E}(X) = \frac{n+1}{2}$$

$$\blacktriangleright \mathbf{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

► Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$ avec $a \leq b$ alors $X - a + 1 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, b - a + 1 \rrbracket)$ et $\mathbf{E}(X) = \frac{a+b}{2}$

$$\text{et } \mathbf{V}(X) = \frac{(b-a+1)^2-1}{12}$$

