“Pas de loi, pas de chocolat” !

Spicesagros.fr

17 novembre 2018

Table des matières

1 Introduction **2**

2 Quelques rappels **2**

3 Enoncés **2**

4 Correction **9**

Recherche de lois unidimensionnelles

“Pas de loi, pas de chocolat !”

1 Introduction

Voici l'intégralité des lois unidimensionnelles données à l'ESCP en ECE et en ECS entre 1995 et 1998, qui ressortent du formol dans ce poly car elles ne sont jamais apparues sur le net grand public, naissant à cette époque avec l'avènement de Windows 98. Ces exercices restent totalement d'actualité et doivent être traitées par tous les étudiants qui souhaitent s'entraîner à la recherche des lois, recherche essentielle qui scellent leur destin dans une épreuve de maths 2, car comme je le dis souvent en cours : "pas de loi pas de chacolat" ! La rédaction utilisée est celle qui satisfairont la plupart des correcteurs de concours, par le soin du détail apporté au dénombrement.

2 Quelques rappels

Voici un résumé des situations fondamentales sous forme de tableau de tirages de p boules dans une urne en contenant n.

Type de tirage	Ordre	Répétitons d'éléments	Dénombrement
Successif avec remise	*oui*	*oui*	n^p
Successif sans remise	*oui*	*non*	$n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)$
Simultané	*non*	*non*	$\binom{n}{p}$

Autrement dit :

- ▶ Le nombre de $p-$listes avec répétitions constituées d'éléments pris dans un ensemble de cardinal n est égal à n^p.
- ▶ Dans tous le document le produit $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)$ sera noté A_n^p qui représente le nombre de $p-$listes sans répétition constituées d'éléments pris dans un ensemble de cardinal n avec $p \leq n$.
- ▶ Le nombre de parties de p éléments pris dans un ensemble de cardinal n est égal à $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ avec $p \leq n$.

3 Enoncés

Exercice 1
Soit A, B, C trois événements tels que $\mathbf{P}(A) = 1/2$, $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(C) = 5/12$, $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(B \cap C) = 1/3$, $\mathbf{P}(A \cap C) = 1/4$ et $\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = 1/4$.
Chercher la loi de $X = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C$.

Exercice 2
Soit A et B deux événements indépendants vérifiant $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = p$.
Déterminer les lois des variables aléatoires $Y = \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B$ et $Z = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.

Exercice 3
Dans une urne il y a k boules blanches et $n-k$ boules noires $(1 \leq k \leq n-1)$. On les tire une à une et sans remise. On introduit une variable aléatoire X associée au rang de la dernière boule blanche tirée. Déterminer la loi de X.

Exercice 4
Déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire U suivant la loi géométrique de paramètre p.

Exercice 5
Une urne contient jetons numérotés de 1 à $2n$. Un joueur tire au hasard un jeton de l'urne et on note X le numéro aléatoire obtenu. Quelle est la loi de X ?

Exercice 6
On considère une succession de lancers d'un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6. X est la variable aléatoire égale au nombre de lancers juste nécessaires pour obtenir pour la première fois un "1". Si on obtient jamais "1", on pose $X = 0$. Donner la loi de X.

Exercice 7
On considère une suite de $2n$ épreuves de Bernoulli indépendantes. Pour chacune la probabilité du succès vaut p et celle de l'échec vaut $q = 1 - p$ (avec $0 < p < 1$).
Soit X la variable aléatoire valant 0 si aucun succès n'est obtenu et i si le premier succès est obtenu à la $i^{\text{ème}}$ épreuve. Déterminer la loi de X.

Exercice 8
On dispose de n urnes contenant chacune N boules numérotées de 1 à N. On tire au hasard, une boule de chaque urne et on note Z_n la variable aléatoire égale au plus grand des numéros obtenus.
Pour $k \in [\![1, N]\!]$, calculer $\mathbf{P}([Z_n \leq k])$ et en déduire la loi de Z_n.

Exercice 9
Un commerçant reçoit un lot de N articles dont n sont défectueux (avec n compris entre 1 et N). Le commerçant contrôle les articles en les tirant au hasard, un par un et sans remise. On appelle X la variable aléatoire égale au rang du premier article défectueux contrôlé.

1. On suppose $n = 1$. Déterminer la loi de X.
2. Pour n et N quelconque, déterminer la loi de X.

Exercice 10
Une urne contient n boules noires et $2n$ boules blanches indiscernables au toucher. On tire les boules une à une, au hasard et sans remise, jusqu'à obtenir la dernière boule noire. Soit X_n le nombre aléatoire de tirages ainsi effectués. Quelle est la loi de X_n ?

Exercice 11
On suppose qu'un étang contient N poissons d'une espèce donnée, N étant un entier inconnu, qu'on souhaite estimer. On en capture K, qu'on marque et qu'on replace dans l'étang. Puis on reprend un par un les poissons de l'étang, sans les remettre, jusqu'à obtenir un nombre k, fixé à l'avance, de poissons marqués. On suppose qu'il n'y a eu ni décès ni naissance d'aucun poisson.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre nécessaire de poissons à pécher pour obtenir k poissons marqués. Déterminer la loi de X.

Exercice 12
On considère une rangée infinie de cases indéxées par $\mathbb{Z}$. Une puce, placée à l'instant n sur une case, saute à l'instant $n+1$ sur une des deux cases voisines équiprobablement. A l'instant 0, elle se trouve sur la case 0.
On note X la variable aléatoire indiquant le numéro de la case occupée par la puce après n sauts, n entier naturel fixé. Quelle est la loi de X ?

Exercice 13
Deux amis jouent aux dés. Chacun jette une paire de dés et recommence jusqu'à ce que la différence du nombre de points des deux dés soit 4. Ils jouent simultanément. La partie se termine lorsque chacun a obtenu une différence de 4.
On suppose qu'ils jettent les dés chaque minute, de façon indépendante, l'un pouvant éventuellement continuer seul. On note X la durée d'une partie.
Quelle est la loi de X ?

Exercice 14
Une urne contient n jetons identiques au toucher numérotés de 1 à n. On tire les jetons un à un sans remise, et on s'arrête dès qu'on tire un jeton dont le numéro est supérieur au numéro du jeton précédemment tiré. On appelle X la longueur aléatoire de la suite ainsi obtenue.
Lorsque dans un tirage, on n'a pas rencontré de numéro supérieur au numéro précédent, on pose $X = n+1$.
Déterminer la fonction de répartition de X et sa loi de probabilité.

Exercice 15
Une urne contient des boules noires et des boules blanches. La proportion de boules noires est p avec $0 < p < 1$. On effectue une suite de tirages d'une boule que l'on remet à chaque fois. On dira que le $n^{\text{ème}}$ tirage est un succès si l'on tire une boule noire. Pour tout $k \geq 1$, on appelle X_k la variable aléatoire représentant le nombre de tirages juste nécessaires pour obtenir k succès consécutifs.
Quelle est la loi de X_1 ?

Exercice 16
N joueurs numérotés de 1 à N avec $N \geq 2$ se lancent une balle au hasard. Au départ, c'est le joueur numéro 1 qui a la balle. Pour $p \in \mathbb{N}$, X_p désigne la variable aléatoire égale au numéro du joueur qui possède la balle avant le $(p+1)^{\text{ème}}$ lancer.
Quelle est la loi de X_0 ?

Exercice 17
Une urne U_1 contient n jetons numérotés de 0 à $n-1$. Une urne U_2 contient n boules numérotées de 1 à n. Deux joueurs A et B jouent au jeu suivant : chaque joueur tire à tour de rôle. Tout d'abord un jeton dans l'urne U_1 et le remet, puis une boule dans l'urne U_2 et la remet.
C'est A qui commence. Le gagnant est le premier joueur qui a tiré un numéro de boule strictement supérieur au numéro du jeton tiré juste avant.
X désigne la variable aléatoire égale au nombre de tirages pour qu'il y ait un gagnant.
Déterminer la loi de X.

Exercice 18
n boules indiscernables sont réparties au hasard parmi r urnes de contenance illimitée. On suppose $n \geq r$.
Pour tout i tel que $1 \leq i \leq r$, on définit une variable aléatoire X_i par :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la } i^{\text{ème}} \text{ urne est vide} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Etudier la loi de X_i.

Exercice 19
On dispose d'une urne contenant initialement 1 boule noire, et k boules blanches, k étant un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On tire une boule de l'urne, au hasard. Si c'est la noire, le jeu s'arrête. Sinon, on remet dans l'urne la boule tirée plus une autre blanche, et l'on recommence.
On désigne par X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la boule noire.
Déterminer la loi de X.

Exercice 20
Une urne contient $n+1$ boules numérotées de 0 à n ($n \geq 2$). On y effectue une infinité de tirages au hasard d'une boule avec remise. On définit une suite de variables aléatoires X_i, $i \in \mathbf{N}^*$, de la façon suivante :

- X_1 est la variable égale à 1 ;
- pour $i \geq 2$, $[X_i = 1]$ si le numéro obtenu au $i^{\text{ème}}$ tirage n'a pas été obtenu au cours des $(i-1)$ premiers tirages, et $[X_i = 0]$ dans le cas contraire.
  Déterminer la loi de X_2.

Exercice 21
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n ($n \geq 2$). On s'intéresse à la suite d'épreuves suivantes : on tire au hasard une boule de l'urne, on note son numéro, puis on la remet dans l'urne. On retire alors de l'urne toutes les boules portant un numéro strictement inférieur au numéro que l'on vient de noter. L'urne est alors prête pour le tirage suivant. Par exemple, si, lors du premier tirage, la boule numérotée $n-2$ est sortie, il ne restera dans l'urne que les boules numérotées $n-2$, $n-1$, n pour le second tirage.
On note U_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au $k^{\text{ème}}$ tirage.
Donner la loi de U_1.

Exercice 22
Dans un local, il y a N dragées, dont b bleues et r roses. On pose $p = \dfrac{b}{N}$ et $q = 1 - p$.
On décide d'effectuer dans ce bocal, des tirages successifs d'une dragée au hasard, avec remise à chaque fois de la dragée tirée, jusqu'à obtenir une dragée bleue. Soit X la variable aléatoire prenant comme valeur le nombre de tirages nécessaires. Calculer pour tout entier $n \geq 1$, la probabilité $\mathbf{P}([X = n])$.

Exercice 23
Une urne contient n boules numérotées depuis 1 jusqu'à n. On extrait les boules de cette urne, au hasard, une par une et sans remise, jusqu'à obtenir les trois boules numérotées 1, 2 et 3. Soit X le nombre aléatoire de tirages juste nécessaires.
Déterminer la loi de X.

Exercice 24
Un joueur décide d'aller tenter sa chance au casino. En arrivant, il prend un jeton qu'il paie 10 francs et il joue avec une machine qui fonctionne selon les règles suivantes :
A chaque partie, il y a trois issues possibles :

- ▶ il gagne le "jackpot", qui est un gain de 100 francs, avec la probabilité a $(0 < a < 1)$; il récupère également sa mise et est obligé de cesser de jouer ;
- ▶ il perd sa mise, avec la probabilité b $(0 < b < 1)$ et cesse de jouer ;
- ▶ dans tous les autres cas, il gagne une partie gratuite et est obligé de rejouer.
  Soit X le nombre aléatoire de parties ainsi jouées.
  Donner la loi de X (on pourra poser $q = 1 - a - b$).

Exercice 25
Soit n est un entier supérieur ou égal à 3 ; n personnes jouent des parties de pile ou face : à chaque partie, chacun lance une pièce de monnaie équilibrée. Si toutes les pièces, sauf une, donnent le même résultat, le propriétaire de celle–ci est déclaré perdant.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties jouées pour obtenir un perdant.
Déterminer la loi de X.

Exercice 26
Soit n un entier, supérieur ou égal à 3. On suppose que n souris sont lâchées en direction de 3 cages, c_1, c_2, c_3, chaque cage pouvant contenir les n souris et chaque souris allant dans une cage au hasard.

1. Quelle est la probabilité qu'une cage au moins reste vide ?
2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de cages restées vides. Déterminer la loi de X.

Exercice 27
Quel est le nombre de suites strictement croissantes que l'on peut former avec p entiers choisis entre 1 et N $(N \geq 2)$?
Une urne contient N jetons numérotés de 1 à N. On tire, au hasard et sans remise, chacun des jetons de l'urne et on note $\omega = (u_1, \ldots, u_N)$ la suite des numéros ainsi obtenus. Soit X la variable aléatoire définie par :
$X(\omega) = r$, où r est le plus petit entier appartenant à $[\![1, N-1]\!]$ tel que $u_r > u_{r+1}$, $X(\omega) = N$ sinon.
Calculer, pour $k \in [\![1, N-1]\!]$, la probabilité $\mathbf{P}([X > k])$ et en déduire la loi de X et vérifier que $\sum\limits_{k=1}^{N} \mathbf{P}([X = k]) = 1$.

Exercice 28
On lance indéfiniment une pièce truquée amenant pile avec la probabilité p (avec $0 < p < 1$), et on pose $q = 1 - p$. On s'intéresse à la longueur des séries ou apparitions successives de "pile" ou de "face", en appelant série une succession de "pile" ou une succession de "face" interrompue par l'événement contraire. Par exemple dans la suite (P,F,F,P,P,P,F) il y a 2 séries de "pile" de longueur 1 et 3, et deux séries de "face" de longueur 2 et 1.
On note X_i la longueur aléatoire de la $i^{\text{ème}}$ série.
Donner la loi de X_1.

Exercice 29
Une roue de loterie est composée de N numéros distincts. Un seul numéro sort à chaque partie. Les parties sont supposées indépendantes.
Pour tout $r \in \{1, \ldots, N\}$, on appelle S_r la variable aléatoire égale au nombre de parties nécessaires pour obtenir r numéros différents. On pose $X_k = S_{k+1} - S_k$, $1 \leq k \leq N-1$.
Que représente la variable X_k ? En déduire sa loi.

Exercice 30
Une urne contient 2 boules blanches, numérotées 1 et 2, et une boule noire. On effectue des tirages successifs d'une boule, avec remise, jusqu'à l'apparition de la noire, où on arrête l'expérience.

On appelle N la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées.
Déterminer la loi de N ?

Exercice 31
Un mobile se déplace sur un axe gradué d'origine O par sauts successifs d'une unité ou de deux unités vers la droite selon les règles suivantes :

- au départ le mobile est en O ;
- si à un instant le mobile est sur la case d'abscisse k, il sera à l'instant suivant soit sur la case d'abscisse $k+1$ avec la probabilité $1/2$, soit sur la case d'abscisse $k+2$ avec la probabilité $1/2$.
- Les sauts sont indépendants.
  On note Y_n la variable aléatoire égale au nombre de sauts d'une unité effectués au bout de n sauts.
  Déterminer la loi de Y_n.

Exercice 32
Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ où $0 < p < 1$, (on pourra poser $q = 1-p$). Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 ; on note $Q = \left\lfloor \dfrac{X}{n} \right\rfloor$, la partie entière de $\dfrac{X}{n}$.
Donner la loi de Q.

Exercice 33
Une urne contient N boules, indiscernables au toucher, numérotées de 1 à N.
On effectue n tirages au hasard d'une boule de l'urne, avec remise de la boule dans l'urne après chaque tirage.
Soit k un nombre fixé compris entre 1 et N, au sens large, et X la variable aléatoire désignant le nombre de boules, parmi les n tirées, dont les numéros sont strictement compris entre k et $N+1-k$.
Déterminer la loi de X.

Exercice 34
On considère une suite de parties indépendantes de "pile ou face", la probabilité d'obtenir pile à chaque lancer étant égale à p, avec $0 < p < 1$.
Soit k un entier naturel fixé au moins égal à 2. On note T le numéro aléatoire du lancer amenant pour la $k^{\text{ème}}$ fois pile. Déterminer la loi de T (on admettra que $\sum\limits_{n=k}^{+\infty} \mathbf{P}([T=n]) = 1$).

Exercice 35
Une urne contient n jetons ($n \geq 2$) numérotés depuis 1 jusqu'à n. On extrait les jetons un par un et sans remise. Pour i compris entre 1 et n, on note X_i la variable aléatoire égale au numéro du jeton obtenu au $i^{\text{ème}}$ tirage.
Soit T_n la variable aléatoire égale au plus petit des indices i tels que $X_i > X_{i+1}$, si cet indice existe. Si un tel indice n'existe pas, on pose $T_n = n$.

1. Pour $k \in \mathbb{N}$ quelconque, calculer $\mathbf{P}([T_n > k])$.
2. En déduire la loi de T_n.

Exercice 36
Une urne contient N boules blanches numérotées de 1 à N où N est un entier inconnu strictement supérieur à 2. On en tire, simultanément et au hasard, n boules, avec $1 < n < N$. On note X la variable aléatoire prenant pour valeur le plus grand des numéros obtenus sur l'ensemble des n boules tirées.
Déterminer la loi de X.

Exercice 37
Un joueur possède un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6. Il effectue une suite de lancers indépendants et s'arrête lorsqu'il a obtenu pour la première fois deux nombres successifs identiques.
Soit X le nombre de lancers à effectuer. Calculer la probabilité de l'événement $[X = n]$ pour n entier naturel.
Reconnaître la loi de $X - 1$.

Exercice 38
Un jeu consiste à tirer un numéro parmi les nombres $\{0, \ldots, n\}$, $(n > 0)$. Le joueur gagne la somme x égale au numéro tiré si ce numéro est pair, ou perd cette somme x si le numéro tiré est impair.
On suppose que le numéro tiré suit une loi uniforme sur $\{0, \ldots, n\}$.
Donner la loi du gain (positif ou négatif) du joueur.

Exercice 39
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire plusieurs fois au hasard et avec remise une boule de l'urne. On arrête les tirages dès que le dernier numéro obtenu est supérieur ou égal au numéro obtenu lors du précédent tirage. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

1. Déterminer $X(\Omega)$.
2. Déterminer la probabilité des événements $[X \geq 2]$, $[X \geq 3]$ et $[X = 2]$.
3. Pour tout $k \in X(\Omega)$, déterminer la probabilité de l'événement $[X \geq k]$.
4. En déduire la loi de X.

Exercice 40
On effectue une succession indéfinie de lancers indépendants avec une pièce donnant Pile avec la probabilité $p \in]0,1[$ et Face avec la probabilité $q = 1 - p$.
On dit que la première série est de longueur $L_1 = n \geq 1$ si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(n+1)^{\text{ème}}$, l'autre.
Déterminer la loi de L_1.

Exercice 41
On considère 6 dés, cinq étant équilibrés. Le dernier est pipé de manière à ce que lorsqu'on lance ce dé, chacun des chiffres apparaît avec une probabilité proportionnelle à ce chiffre.
Donner la loi de la variable aléatoire égale au chiffre donné par le dé truqué lorsqu'on le lance.

Exercice 42
Une épreuve écrite de concours se présente sous forme d'un QCM. 50 questions, supposées mutuellement indépendantes y sont posées. Pour chacune des 50 questions, il y a quatre sous-questions supposées mutuellement indépendantes.
Pour chaque sous-question, le candidat a le choix entre deux réponses : "vrai" ou "faux". Les réponses aux questions sont présentées en ligne, une ligne par question, chaque ligne étant constituée de quatre cases à cocher, une par sous-question.
On suppose que le candidat donne une réponse à chaque sous-question et qu'il répond à chaque fois au hasard.
On note F la variable aléatoire décomptant le nombre de sous-questions dont la réponse est erronée.
On suppose que le QCM est corrigé "question par question", c'est-à-dire qu'une ligne est considérée comme juste et rapporte 4 points au candidat si et seulement si toutes les réponses de la ligne sont correctes. Dans le cas contraire, le candidat est pénalisé d'un point. On note X la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus par le candidat.
Déterminer la loi de X.

Exercice 43
Soit n et k deux entiers vérifiant $1 \leq k \leq n$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire une à une, sans remise, k boules de cette urne. Soit X la variable aléatoire égale au plus grand des numéros des boules tirées.

1. Déterminer la loi de X.
2. Même question si le tirage se fait avec remise.

Exercice 44
Si X est un ensemble, on note $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X et pour tout entier naturel k, $\mathcal{P}_k(X)$ l'ensemble des parties de X à k éléments. Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul et E_n désigne l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'éléments de $A \cap B$.
Dans le cas particulier où $n = 7$, $a = 4$ et $b = 2$ déterminer la loi de X.

Exercice 45
Pour p entier naturel non nul, on considère $p+1$ urnes $U_0, U_1, \ldots, U_p$. Dans chaque urne il y a p boules indiscernables au toucher ; pour tout $i \in [\![0, p]\!]$, l'urne numéro i, contient i boules blanches, les autres boules étant noires. On choisit au hasard une urne et dans l'urne choisie, on effectue n tirages avec remise d'une boule $(n \in \mathbb{N}^*)$. On note N_p la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches ainsi obtenues.
Exprimer la loi de N_p.

Exercice 46
Soit n un entier naturel non nul. Une boite contient $2n+1$ jetons bicolores (une face est blanche, l'autre est noire). Les jetons sont numérotés de 1 à $2n+1$ sur leur face blanche, les faces noires ne protant pas de numéro.
On lance simultanément tous les jetons et on observe leurs faces supérieures. Une et une seulement des deux couleurs apparaît un nombre impair de fois. Soit X la variable aléatoire associée à ce nombre.
Déterminer la loi de X.

Exercice 47
Une rampe verticale de spots nommés de bas en haut S_1, S_2, S_3, S_4 change d'état de la manière suivante :
- À l'instant $t = 0$, le spot S_1 est allumé.
- Si à l'instant $t = n$ $(n \geq 0)$, le spot S_1 est allumé, un (et un seul) des spots S_1, S_2, S_3, S_4 s'allume à l'instant $t = n+1$, et ceci de manière équiprobable.
- Si à l'instant $t = n$ $(n \geq 0)$, le spot S_k $(2 \leq k \leq 4)$ est allumé, le spot S_{k-1} s'allume à l'instant $t = n+1$.
- À chaque instant, un seul spot est allumé.
  Soit X la variable aléatoire représentant le premier instant, s'il existe, où le spot S_2 s'allume.

1. Calculer la probabilité pour que le spot S_1 reste constamment allumé jusqu'à l'instant n ($n \in \mathbb{N}$ donné). En déduire que X est bien une variable aléatoire.
2. Calculer la probabilité des événements $[X = 1]$ et $[X = 2]$.
3. Calculer la probabilité des événements $[X = n]$ pour $n \geq 3$.

Exercice 48
On dispose d'une infinité de pièces. La $k^{\text{ème}}$ pièce donne Pile avec la probabilité $p_k \in]0,1[$ et Face avec la probabilité $q_k = 1 - p_k$. On effectue une infinité de lancers, le $k^{\text{ème}}$ lancer utilisant la $k^{\text{ème}}$ pièce. Pour tout $n \geq 1$, on définit une variable aléatoire réelle Y_n par :

$$Y_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \text{Face est tombé au } n^{\text{ème}} \text{ lancer} \\ 1 & \text{si} \quad \text{Pile est tombé au } n^{\text{ème}} \text{ lancer} \end{cases}$$

On pose de plus $Y_0 = 0$.
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de variables aléatoires définies par $X_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$:

$$X_n = n - \max\{0 \leq i \leq n \mid Y_i = 0\}$$

Que représente la variable aléatoire X_n ? Déterminer la loi de X_n.

Exercice 49
Soit n un entier naturel de $\mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules numérotées depuis 1 jusqu'à n. On effectue trois tirages au hasard d'une boule de cette urne, en replaçant à chaque fois la boule obtenue avant le tirage suivant. On désigne par M la variable aléatoire égale au plus grand des numéros obtenus et par m la variable aléatoire égale au plus petit des numéros obtenus et enfin, par Z la variable aléatoire égale à $M - m$.
Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire Z et en donner la loi.

4 Correction

$\boxed{1}$ Dans cet exercice AB désigne l'intersection $A \cap B$ pour alléger les écritures.
Vous savez parfaitement que des variables indicatrices sont des **variables de Bernoulli**, et il serait très tentant de parler de loi binomiale pour X. Le problème est que les trois indicatrices ne sont pas indépendantes pour affirmer cela, puisque les valeurs des probabilités données ne permettent pas de dire que les événements A, B et C sont indépendants. Que faire alors ? Reprendre "tout à la main" !
Nous avons $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ avec

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([X=0]) &= \mathbf{P}([\mathbf{1}_A = 0] \cap [\mathbf{1}_B = 0] \cap [\mathbf{1}_C = 0]) \\
&= \mathbf{P}\left(\overline{ABC}\right) \\
&= 1 - \mathbf{P}(A \cup B \cup C) \\
&= 1 - (\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(BC) - \mathbf{P}(AC) + \mathbf{P}(ABC)) \\
&\quad \text{par la formule du crible} \\
&= 1 - (1/2 + 10/12 - 2/3 - 1/4 + 1/4) \\
&= 1/3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([X=3]) &= \mathbf{P}([\mathbf{1}_A = 1] \cap [\mathbf{1}_B = 1] \cap [\mathbf{1}_C = 1]) \\
&= \mathbf{P}(ABC) \\
&= 1/4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([X=2]) &= \mathbf{P}([\mathbf{1}_A = 1] \cap [\mathbf{1}_B = 1] \cap [\mathbf{1}_C = 0]) + \mathbf{P}([\mathbf{1}_A = 0] \cap [\mathbf{1}_B = 1] \cap [\mathbf{1}_C = 1]) \\
&\qquad + \mathbf{P}([\mathbf{1}_A = 1] \cap [\mathbf{1}_B = 0] \cap [\mathbf{1}_C = 1]) \\
&= \mathbf{P}\left(AB\overline{C}\right) + \mathbf{P}\left(\overline{A}BC\right) + \mathbf{P}\left(A\overline{B}C\right) \\
&= (\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(ABC)) + (\mathbf{P}(BC) - \mathbf{P}(ABC)) + (\mathbf{P}(AC) - \mathbf{P}(ABC)) \\
&= 2/3 + 1/4 - 3/4 \\
&= 1/6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([X=1]) &= 1 - \mathbf{P}([X=0]) - \mathbf{P}([X=2]) - \mathbf{P}([X=3]) \\
&= 1 - 1/3 - 1/6 - 1/4 \\
&= 1/4
\end{aligned}$$

Finalement

k	0	1	2	3
$\mathbf{P}([X=k])$	1/3	1/4	1/6	1/4

$\boxed{2}$ ▶ Déterminons la loi de $\boldsymbol{Y}$.
Nous avons tout d'abord $Y(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ ce qui nous permet d'affirmer que Y ne suit pas une loi connue ! Donc reprenons "tout à la main".

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([Y=-1]) &= \mathbf{P}([\mathbf{1}_A = 0] \cap [\mathbf{1}_B = 1]) \\
&= \mathbf{P}\left(\overline{A}B\right) \\
&= \mathbf{P}\left(\overline{A}\right)\mathbf{P}(B) \\
&\quad \text{par indépendance de } \overline{A} \text{ et } B \\
&= (1-p)\,p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([Y=0]) &= \mathbf{P}([\mathbf{1}_A = 0] \cap [\mathbf{1}_B = 0]) + \mathbf{P}([\mathbf{1}_A = 1] \cap [\mathbf{1}_B = 1]) \\
&= \mathbf{P}\left(\overline{AB}\right) + \mathbf{P}(AB) \\
&= \mathbf{P}\left(\overline{A}\right)\mathbf{P}\left(\overline{B}\right) + \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B) \\
&\quad \text{par indépendance de } A \text{ et } B \text{ donc de } \overline{A} \text{ et } \overline{B} \\
&= (1-p)^2 + p^2 \\
&= 2p^2 - 2p + 1
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{P}([Y=1]) & = & \mathbf{P}([\mathbf{1}_A = 1] \cap [\mathbf{1}_B = 0]) \\ & = & \mathbf{P}\left(A\overline{B}\right) \\ & = & \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}\left(\overline{B}\right) \\ & & \text{par indépendance de } A \text{ et } \overline{B} \\ & = & p(1-p) \end{array}$$

Finalement :

k	-1	0	1
$\mathbf{P}([Y=k])$	$p(1-p)$	$2p^2-2p+1$	$p(1-p)$

► Pour terminer déterminons la loi de $\boldsymbol{Z}$.
Rappelez-vous qu'**un produit de variables de Bernoulli, redonne toujours une variables de Bernoulli (quelles soient indépendantes ou non !)**. C'est dit !

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{P}([Z=1]) & = & \mathbf{P}([\mathbf{1}_A = 1] \cap [\mathbf{1}_B = 1]) \\ & = & \mathbf{P}(AB) \\ & = & \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B) \\ & & \text{par indépendance de } A \text{ et } B \\ & = & p^2 \end{array}$$

Conclusion

$$\boxed{Z \hookrightarrow \mathcal{B}\left(p^2\right)}$$

3 Tout d'abord $X(\Omega) = [\![k, n]\!]$, l'entier k étant obtenue lorsque toutes les blanches sont obtenues dés les k premiers tirages ; l'autre cas extrême, lorsqu'on tire toutes les boules blanches sauf une, lors des $n-1$ premiers tirages. Le lecteur se convaincra que tous les cas intermédiaires sont possibles. Calculons pour tout i de $X(\Omega)$, $\mathbf{P}([X=i])$. Rappelons que l'événement $[X=i]$ est réalisé si, et seulement si, la $k^{\text{ème}}$ et dernière boule blanche est arrivée lors du $i^{\text{ème}}$ tirage. Un tirage favorable sera caractérisé par le placement des $k-1$ premières boules blanches lors des $i-1$ premiers lancers, alors qu'un tirage quelconque (ce qui donnera $\text{Card}(\Omega)$) sera caractérisé par l'emplacement des k boules blanches parmi les n places disponibles. Ainsi

$$\boxed{\forall i \in [\![k, n]\!], \quad \mathbf{P}([X=i]) = \frac{\binom{i-1}{k-1}}{\binom{n}{k}}}$$

4 Nous avons, d'après le cours, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}([U=k]) = p(1-p)^{k-1}$. Par conséquent, en posant $q = 1-p$ la fonction de répartition F_U de U est définie par

$$\begin{array}{rcl} F_U(x) & = & \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ \mathbf{P}([U \leq \lfloor x \rfloor]) & \text{si} \quad x \geq 1 \end{array} \right. \\ & & \text{où } \lfloor x \rfloor \text{ désigne la partie entière de } x \text{ en remarquant} \\ & & \text{que pour tout réel } x\ \mathbf{P}([U \leq x]) = \mathbf{P}([U \leq \lfloor x \rfloor]) \\ & & \text{puisque } U \text{ est une variable entière} \\ & = & \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ 1 - \mathbf{P}([U > \lfloor x \rfloor]) & \text{si} \quad x \geq 1 \end{array} \right. \end{array}$$

$$\boxed{F_U(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ 1 - q^{\lfloor x \rfloor} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{array} \right.}$$

En effet l'événement $[U > \lfloor x \rfloor]$ est réalisé si, et seulement si, les $\lfloor x \rfloor$ premieres issues des tirages n'amènent que des échecs.

5 Les conditions de l'expérience nous amènent à penser que

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, 2n]\!])}$$

6 Nous avons

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \bigsqcup \{0\} = \mathbb{N}$$

avec sur $\mathbb{N}^*$ une situation classique de temps d'attente d'un premier succès, obtenir pour la première fois un "1", lors d'une succession illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre $p = \dfrac{1}{6}$, et qui s'arrête lorsque survient le premier succès. Ceci nous fait écrire que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}([X = k]) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}$$

Enfin comme la famille $([X = k])_{k \geq 0}$ constitue un système complet d'événements, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([X = 0]) &= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}([X = k]) \\ &= 1 - \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \\ &\quad \text{somme d'une série convergente de raison } 5/6 \text{ avec } |5/6| < 1 \\ &= 1 - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{1 - 5/6}\right) \\ &= 1 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

L'événement $[X = 0]$ est donc quasi-impossible et l'on peut dire que

$$\boxed{\text{La variable } X \text{ suit la loi géométrique de paramètre } \frac{1}{6} \text{ à un événement négligeable près}}$$

soit encore

$$\boxed{\text{Sur le support } \mathcal{S}_X = \mathbb{N}^*,\ X \text{ suit la loi géométrique de paramètre } \frac{1}{6}}$$

7 Pour commencer il ne faut surtout pas faire la bêtise de dire que X suit une loi géométrique, tout simplement parce que X est à **support fini** !
Notons pour tout entier k non nul S_k l'événement : “obtenir un succès lors de la $k^{\text{ème}}$ épreuve”. Signalons que ces événements sont indépendants par l'indépendance des épreuves. Ainsi

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([X = 0]) &= \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{2n} \overline{S_i}\right) \\ &= \prod_{i=1}^{2n} \mathbf{P}\left(\overline{S_i}\right) \\ &\quad \text{par indépendance des événements} \\ &= \prod_{i=1}^{2n} q \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\mathbf{P}([X = 0]) = q^{2n}}$$

Pour tout entier k non nul de l'intervalle $[\![1, 2n]\!]$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([X = k]) &= \mathbf{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{S_i}\right) \cap S_k\right) \\ &= \left(\prod_{i=1}^{k-1} \mathbf{P}\left(\overline{S_i}\right)\right) \mathbf{P}(S_k) \\ &\quad \text{par indépendance des événements} \\ &= q^{k-1} p \end{aligned}$$

Conclusion

$$\boxed{\mathbf{P}([X = k]) = \left\{ \begin{array}{lll} q^{2n} & \text{si} & k = 0 \\ q^{k-1} p & \text{si} & k \in [\![1, 2n]\!] \end{array} \right.}$$

$\boxed{8}$ Dans cette situation ultra-classique de “plus grand[1] que ...” **vous devez impérativement travailler en "répartition",** pour votre confort, même si le texte ne vous le signale pas. C’est dit une fois pour toute !
Tout d’abord mentionnons que

$$Z_n(\Omega) = [\![1, N]\!]$$

Pour tout entier k de $[\![1, N]\!]$, l’événement $[Z_n \leq k]$ est réalisé si, et seulement si, tous les tirages ont amené un numéro compris entre 1 et k. Par indépendance des tirages et hypothèse d’équiprobabilité, on a donc

$$\forall k \in [\![1, N]\!], \quad \mathbf{P}([Z_n \leq k]) = \left(\frac{k}{N}\right)^n$$

La formule suivante restant valable pour $k = 0$ (*ne surtout pas oublier de le vérifier*), il vient pour tout k de $[\![1, N]\!]$,

$$\mathbf{P}([Z_n = k]) = \mathbf{P}([Z_n \leq k]) - \mathbf{P}([Z_n \leq k-1]) = \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n$$

Conclusion

$$\boxed{\forall k \in [\![1, N]\!], \quad \mathbf{P}([Z_n = k]) = \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n}$$

$\boxed{9}$

1. Comme l’univers Ω est l’ensemble des bijections qui existent entre l’ensemble des N articles et celui des N emplacements possibles, $\operatorname{Card}\Omega = N!$. D’autre part il y a $(N-1)!$ façons de placer les articles de telle façon que l’article défectueux soit à la $k^{\text{ème}}$ place. En effet il y a une seule façon de placer l’article défectueux au $k^{\text{ème}}$ rang de tirage et $(N-1)!$ rangements possibles des autres articles aux $N-1$ places restantes.
Conclusion :
$$\forall k \in [\![1, N]\!], \quad \mathbf{P}([X = k]) = \frac{(N-1)!}{N!} = \frac{1}{N}$$
Autrement dit :
$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, N]\!])}$$

2. Avant toute chose signalons que **du côté de l’observateur**, les différents tirages sont différentiables les uns des autres par les positions des articles défectueux par rapport à celles des articles non défectueux. Nous tiendrons compte de ce constat pour effectuer le dénombrement des cas favorables et des cas possibles.
La variable X prend ses valeurs dans $[\![1, N-n+1]\!]$ (il est évident, $N-n+1$ est le second rang extrême où l’on tire d’abord les $N-n$ articles non défectueux et il n’y a pas de raison de supprimer de valeurs intermédiaires). Pour k fixé entre 1 et $N-n+1$, l’événement $[X = k]$ est réalisé si, et seulement si, les articles défectueux sont placés au rang k pour le premier d’entre eux, et à $n-1$ rangs compris entre $k+1$ et N. Il y a donc une seule façon de placer le premier article défectueux au rang k et $\binom{N-k}{n-1}$ façons de choisir les places qui seront occupées par les articles défectueux restants. Enfin il y a $\binom{N}{n}$ placements possibles des n articles défectueux aux N places disponibles.
Conclusion
$$\boxed{\forall k \in [\![1, N-n+1]\!], \quad \mathbf{P}([X = k]) = \frac{\binom{N-k}{n-1}}{\binom{N}{n}}}$$

$\boxed{10}$ La variable X_n prend ses valeurs entre n et $3n$, et pour $k \in [\![n, 3n]\!]$, $[X_n = k]$ est réalisé si et seulement si :

- ▶ au cours des $k-1$ premiers tirages, on a obtenu exactement $n-1$ boules noires et $k-n$ boules blanches, cet événement se produisant avec la probabilité $\frac{\binom{n}{n-1}\binom{2n}{k-n}}{\binom{3n}{k-1}}$ *(les tirages sont effectués sans remise, l’urne contenant deux catégories de boules, on dit que l’on utilise un schéma hypergéométrique. C’est hors-programme depuis 2014 et c’est très dommage !)*.

[1] C’est exactement la même chose que pour les supremum de variables aléatoires ($\sup(X_1, X_2, ..)$).

► **Sachant** que cet événement s'est produit, on obtient la boule noire **restante**, parmi les $3n-(k-1)$ boules alors présentes dans l'urne, lors du $k-$ème tirage.
Soit par la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned}
\forall k \in [\![n,3n]\!],\ \mathbf{P}([X_n=k]) &= \frac{\binom{n}{n-1}\binom{2n}{k-n}}{\binom{3n}{k-1}} \times \frac{1}{3n-(k-1)} \\
&= \frac{n\binom{2n}{k-n}}{\binom{3n}{k-1}} \times \frac{1}{3n-(k-1)} \\
&= \frac{n\,(2n)!\,(k-1)!\,(3n-k+1)!}{(k-n)!\,(3n-k)!\,(3n)!\,(3n-k+1)} \\
&= \frac{n\,(2n)!\,(k-1)!}{(k-n)!\,(3n)!} \times \frac{(n-1)!}{(n-1)!} \\
&= \frac{n!\,(2n)!}{(3n)!} \times \frac{(k-1)!}{(k-n)!\,(n-1)!} \\
&= \frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{3n}{n}}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall k \in [\![n,3n]\!],\quad \mathbf{P}([X_n=k]) = \frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{3n}{n}}}$$

11 Cet exercice est "le petit frère" du précédent ! Raisonnons de la même manière.
L'ensemble des valeurs prises par X est :

$$\{k, k+1, \ldots, N-K+k\}$$

L'événement $[X=i]$ (évitez la lettre "k" qui est déjà prise) est réalisé si, et seulement si, on a $(k-1)$ poissons marqués et $(i-k)$ non marqués parmi les $(i-1)$ premières captures et que le $i^{\text{ème}}$ poisson capturé soit marqué. Notons A le premier événement, et B le second. On a par la formule des probabilités composées

$$\mathbf{P}([X=i]) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}_A(B)$$

sous réserve que $\mathbf{P}(A) \neq 0$

► Pour calculer la probabilité $\mathbf{P}(A)$ il suffit de choisir $(k-1)$ poissons parmi K marqués et $(i-k)$ parmi les $(N-K)$ non marqués (cas favorables). Le nombre de cas possibles est donné par le nombre de choix de $(i-1)$ poissons de l'étang parmi les N. Ainsi

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\binom{K}{k-1}\binom{N-K}{i-k}}{\binom{N}{i-1}} \neq 0$$

Les puristes auront reconnu l'utilisation d'un *schéma hypergéométrique*.

► La probilité conditionnelle $\mathbf{P}_A(B)$ n'est autre que la probabilité de capturer un poisson parmi les $(K-k+1)$ poissons marqués restants sur les $(N-i+1)$ poissons qui restent. Donc

$$\boxed{\forall i \in \{k, k+1, \ldots, N-K+k\},\quad \mathbf{P}([X=i]) = \frac{\binom{K}{k-1}\binom{N-K}{i-k}}{\binom{N}{i-1}} \times \frac{K-k+1}{N-i+1}}$$

12 Tout d'abord l'univers qui est muni de la probabilité uniforme, est l'ensemble des $2-$listes d'éléments de l'ensemble $\{G, D\}$ (G pour l'événement : "le saut se fait vers la gauche" et D pour l'événement : "le saut se fait vers la droite"). Ainsi classiquement $\operatorname{Card}\Omega = 2^n$. Notons k le nombre de sauts vers la droite au cours des n sauts ($0 \leq k \leq n$). On a

$$X(\Omega) = \{2k-n \mid k \in [\![0,n]\!]\}$$

En effet X est en quelque sorte l'abscisse du point marquant la position de la puce après n sauts. Or sauter vers la droite la fait avancer et sauter vers la gauche la fait reculer ! Donc on décompose l'abscisse de la puce à l'instant n en disant qu'il est égal à :

$$(1 \times k) + (-1 \times (n-k)) = 2n-k$$

Le nombre de cas favorables est le nombre de choix, par exemple, de l'emplacement des k pas effectués vers la droite parmi les n possibles, soit $\binom{n}{k}$.

Conclusion

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \mathbf{P}([X = 2k - n]) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}}$$

13 Le plus simple, et de loin, avec ce texte qui vous laisse libre de vos choix de résolution, consiste à introduire un couple aléatoire (X_1, X_2) où X_1 (respectivement X_2) est la variable aléatoire associée au temps d'attente du premier succès pour le premier joueur (joueur A) (respectivement le second joueur B). Ces deux variable sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et suivent la même loi géométrique de $1/9$ (car il y a 4 couples de résultats sur les 36 donnant une différence de 4). Donc, pour tout $k \geq 1$,

$$\mathbf{P}([X_1 = k]) = \mathbf{P}([X_2 = k]) = \frac{1}{9}\left(\frac{8}{9}\right)^{k-1}$$

Enfin vous n'aurez aucun mal à comprendre que $X = \sup(X_1, X_2)$. Alors déterminons la loi de notre premier suppremum de l'année, en passant par sa fonction de répartition comme il se doit !

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}([X \leq k]) &= \mathbf{P}([X_1 \leq k] \cap [X_2 \leq k]) \\
&= \mathbf{P}([X_1 \leq k])\,\mathbf{P}([X_2 \leq k]) \\
&\quad \text{par indépendance des deux variables} \\
&= (1 - \mathbf{P}([X_1 > k]))^2 \\
&\quad \text{car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ suivent la même loi, et rappelez-vous} \\
&\quad \text{ce que l'on a dit sur la loi géométrique et l'antirépartition} \\
&= \left(1 - \left(\frac{8}{9}\right)^k\right)^2
\end{aligned}$$

Notez bien que la formule valable encore pour $k = 0$ puisque $\mathbf{P}([X \leq 0]) = 0$

Enfin

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}([X = k]) &= \mathbf{P}([X \leq k]) - \mathbf{P}([X \leq k-1]) \\
&= \left(1 - \left(\frac{8}{9}\right)^k\right)^2 - \left(1 - \left(\frac{8}{9}\right)^{k-1}\right)^2 \\
&= \left(1 - \left(\frac{8}{9}\right)^k + 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^{k-1}\right)\left(1 - \left(\frac{8}{9}\right)^k - 1 + \left(\frac{8}{9}\right)^{k-1}\right) \\
&= \left(2 - \left(\frac{8}{9}\right)^{k-1}\left(\frac{8}{9} + 1\right)\right)\left(\frac{8}{9}\right)^{k-1}\left(1 - \frac{8}{9}\right) \\
&= \frac{1}{9}\left(\frac{8}{9}\right)^{k-1}\left(2 - \frac{17}{9}\left(\frac{8}{9}\right)^{k-1}\right)
\end{aligned}$$

Conclusion

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}([X = k]) = \frac{1}{9}\left(\frac{8}{9}\right)^{k-1}\left(2 - \frac{17}{9}\left(\frac{8}{9}\right)^{k-1}\right)}$$

14 La variable X est le premier rang k où le numéro du jeton tiré est supérieur au numéro du jeton tiré en position $(k-1)$. Donc

$$X(\Omega) = \{2, \ldots, n+1\}$$

- ► Pour $k \leq n$, l'événement $[X > k]$ est l'ensemble des tirages dans lesquels les k premiers numéros tirés sont ordonnés par **ordre décroissant**. A chaque partie de k éléments pris parmi n, il correspond une **seule suite** strictement décroissante de k éléments, les $n - k$ restants n'étant pas ordonnés dans un ordre particulier. Ainsi, $\text{Card}([X > k]) = \binom{n}{k}$. D'où il vient

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}, \quad \mathbf{P}([X > k]) = \frac{\binom{n}{k}}{A_n^k} = \frac{1}{k!}$$

d'où il vient

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}, \quad \mathbf{P}([X \leq k]) = 1 - \frac{1}{k!}$$

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbf{P}([X \leq x]) &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 2 \\ \mathbf{P}([X \leq \lfloor x \rfloor]) & \text{si} \quad x \in [k, k+1[\,,\ k \in \{2, \ldots, n\} \\ 1 & \text{si} \quad x \geq n+1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 2 \\ 1 - \mathbf{P}([X > \lfloor x \rfloor]) & \text{si} \quad x \in [k, k+1[\,,\ k \in \{2, \ldots, n\} \\ 1 & \text{si} \quad x \geq n+1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 2 \\ 1 - \dfrac{1}{\lfloor x \rfloor !} & \text{si} \quad x \in [k, k+1[\,,\ k \in \{2, \ldots, n\} \\ 1 & \text{si} \quad x \geq n+1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}
\forall k \in \{2, \ldots, n\},\ \mathbf{P}([X = k]) &= \mathbf{P}([X \leq k]) - \mathbf{P}([X \leq k-1]) \\
&= \left(1 - \frac{1}{k!}\right) - \left(1 - \frac{1}{(k-1)!}\right) \\
&\quad \text{formule valable lorsque } k = 2 \\
&= \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} \\
&= \frac{k-1}{k!}
\end{aligned}$$

Enfin

$$\mathbf{P}([X = n+1]) = \frac{1}{n!}$$

car il n'y a qu'**une seule** suite strictement décroissante lorsqu'on n'a pas rencontré de numéro supérieur au numéro précédent, c'est la suite $(n, n-1, \ldots, 2, 1)$.
Conclusion

$$\boxed{\forall k \in \{2, \ldots, n+1\}, \quad \mathbf{P}([X = k]) = \begin{cases} \dfrac{k-1}{k!} & \text{si} \quad k \in \{2, \ldots, n\} \\ \dfrac{1}{n!} & \text{si} \quad k = n+1 \end{cases}}$$

Vous noterez bien que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \mathbf{P}([X = k]) &= \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{k-1}{k!}\right) + \frac{1}{n!} \\
&= \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}\right) + \frac{1}{n!} \\
&\quad \text{par téléscopage} \\
&= 1 - \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!} \\
&= 1
\end{aligned}$$

15 La variable X_1 est tout simplement un temps d'attente du premier succès lors d'une succession illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p et qui s'arrête lors de l'atteinte du premier succès. Ainsi

$$\boxed{X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)}$$

16 Aucun commentaire particulier :

$$\boxed{\text{La variable } X_0 \text{ est la variable quasi-certaine égale à } 1}$$

17 La variable X suit une loi de temps d'attente d'un premier succès (premier joueur qui a tiré un numéro de boule strictement supérieur au numéro du jeton tiré juste avant). Calculons la probabilité du succès, paramètre de la loi, de tirer un numéro strictement supérieur au numéro du jeton tiré juste avant. Pour cela introduisons les événements suivants

- Pour $i \in [\![0, n-1]\!]$, A_i : "le jeton portant le numéro i a été tiré".
- Pour $j \in [\![1, n]\!]$, B_j : "la boule portant le numéro j a été tirée".
- Pour $k \in [\![1, n]\!]$, E_k : "la boule tirée porte le numéro k et le jeton tiré à la suite porte un numéro compris entre 0 et $k-1$".
- E :"la boule tirée porte un numéro strictement supérieur à celui du jeton tiré juste avant".

Il est clair que chaque A_i est indépendant de chaque B_j et que

$$\mathbf{P}(A_i) = \mathbf{P}(B_j) = \frac{1}{n}$$

On a pour $k \in [\![1, n]\!]$,

$$E_k = B_k \cap \left(\bigsqcup_{i=0}^{k-1} A_i \right)$$

et par indépendance des événements B_k et $\bigsqcup_{i=0}^{k-1} A_i$, puisque chaque A_i est indépendant de chaque B_j, il vient

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(E_k) &= \mathbf{P}(B_k)\,\mathbf{P}\left(\bigsqcup_{i=0}^{k-1} A_i \right) \\
&= \mathbf{P}(B_k) \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{P}(A_i) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{n} \\
&= \frac{k}{n^2}
\end{aligned}$$

Or nous avons

$$E = \bigsqcup_{k=1}^{n} E_k$$

donc par $\sigma-$additivité de $\mathbf{P}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(E) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(E_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \\
&= \frac{n(n+1)}{2n^2} \\
&= \frac{n+1}{2n}
\end{aligned}$$

Conclusion

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{n+1}{2n} \right)}$$

18 Pour $i \in [\![1, n]\!]$, la variable aléatoire X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre

$$p = \mathbf{P}([X_i = 1]) = \left(\frac{r-1}{r} \right)^n$$

Conclusion

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\left(\frac{r-1}{r}\right)^n\right)}$$

Explications : l'univers est l'ensemble des $n-$listes d'éléments de l'ensemble des numéros des r urnes. Le nombre de cas favorables est celui des $n-$listes d'éléments de l'ensemble des numéros des r urnes privé du numéro i.

19 Il est évident que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Notons pour tout entier i non nul B_i (respectivement N_i) les événements : "tirer une boule blanche (respectivement une boule noire) au $i^{\text{ème}}$ tirage". Nous avons alors :

$$\mathbf{P}([X=1]) = \mathbf{P}(N_1) = \frac{1}{k+1}$$

Pour tout entier $i \geq 2$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([X=i]) &= \mathbf{P}(B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1} \cap N_i) \\
&= \mathbf{P}(B_1)\,\mathbf{P}_{B_1}(B_2) \times \cdots \times \mathbf{P}_{B_1\cap\ldots\cap B_{i-2}}(B_{i-1})\,\mathbf{P}_{B_1\cap\ldots\cap B_{i-1}}(N_i) \\
&\quad \text{selon la formule des probabilités composées} \\
&= \frac{k}{k+1} \times \frac{k+1}{k+2} \times \cdots \times \frac{k+i-2}{k+i-1} \times \frac{1}{k+i} \\
&= \frac{k}{(k+i-1)(k+i)}
\end{aligned}$$

Conclusion

$$\boxed{\forall i \geq 1, \quad \mathbf{P}([X=i]) = \begin{cases} \dfrac{1}{k+1} & \text{si} \quad i = 1 \\ \dfrac{k}{(k+i-1)(k+i)} & \text{si} \quad i \geq 2 \end{cases}}$$

20 La variable X_2 est une variable de Bernoulli. Le nombre de tirages possibles est $(n+1)^2$ (les tirages étant effectués avez remise, l'univers est l'ensemble des $2-$ listes de l'ensemble des numéros $\{0,\ldots,n\}$). Le nombre de tirages favorables est $A_{n+1}^2 = (n+1)\,n$ pour obtenir deux numéros différents (l'ensemble des cas favorables est l'ensemble des $2-$arrangements, ou $2-$listes sans répétition, de $\{0,\ldots,n\}$). Ainsi

$$\boxed{\mathbf{P}([X_2=1]) = \frac{(n+1)\,n}{(n+1)^2} = \frac{n}{n+1}}$$

21 La première épreuve consiste à tirer une boule au hasard parmi n boules distinctes. Donc U_1 suit une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$, et

$$\boxed{\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \mathbf{P}([U_1=k]) = \frac{1}{n}}$$

22 Comme la variable X suit une loi de temps d'attente du premier succès, qui est ici obtenir une dragée bleue, nous pouvons dire que X suit la loi géométrique de paramètre p (qui est la proportion de dragées bleues). Nous pouvons écrire que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}([X=n]) = q^{n-1}p}$$

23 Nous avons d'évidence $X(\Omega) = [\![3,n]\!]$ et pour $k \in [\![3,n]\!]$, l'événement $[X=k]$ est réalisé si et seulement si les $k-1$ premiers tirages amènent deux des trois boules intéressantes (*schéma hypergéométrique*), le $k^{\text{ème}}$ tirage amenant la dernière boule intéressante parmi les $n-(k-1)$ boules restantes (les boules intéressantes sont les boules marquèes $1,2,3$). Pour tout k de $[\![3,n]\!]$, on a par la formule des probabilités composées

$$\boxed{\mathbf{P}([X=k]) = \frac{\binom{3}{2}\binom{n-3}{k-3}}{\binom{n}{k-1}} \times \frac{1}{n-k+1} = \frac{3\,(k-1)\,(k-2)}{n\,(n-1)\,(n-2)}}$$

24 A chaque fois que l'on joue, la probabilité de gagner une partie gratuite vaut $q = 1 - a - b$ et dans le cas contraire le jeu s'arrête. Ainsi X suit une loi de temps d'attente du premier arrêt du jeu (premier succès) qui est le joueur gagne ou perd de probabilité $a + b$. A savoir X suit la loi géométrique de paramètre $a + b$, c'est-à-dire que par indépendance des parties jouées

$$\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}^*, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}([X = k]) = q^{k-1}(1-q)}$$

25 A chaque partie, il y a un perdant si on obtient exactement une fois pile (dont il faut choisir le rang d'apparition) ou exactement $n-1$ fois pile[2] (dont il faut choisir les rangs d'apparition). La probabilité qu'il y ait un perdant vaut donc

$$\begin{aligned} p &= \binom{n}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \binom{n}{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^1 \\ &= \frac{n}{2^n} + \frac{n}{2^n} \\ &= \frac{n}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

La variable X est donc le temps d'attente d'un perdant et par indépendance des parties jouées, X suit la loi géométrique de paramètre p.
Conclusion

$$\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}^*, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}([X = k]) = \frac{n}{2^{n-1}}\left(1 - \frac{n}{2^{n-1}}\right)^{k-1}}$$

26 1. ► Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, soit A_i l'événement : "la cage numéro i reste vide". On a

$$\mathbf{P}(A_i) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

En effet, on (je me mets à la place de chaque souris !) a effectué n expériences indépendantes (choisir une cage parmi trois, et ce, de façon équiprobable) et à chaque fois on a choisi une des deux autres cages parmi les trois possibles.

► De même, pour $(i, j) \in [\![1, 3]\!]^2$, $i \neq j$:

$$\mathbf{P}(A_i \cap A_j) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

(on a choisi à chaque fois la troisième cage).

► On cherche la probabilité $\mathbf{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ qui donne par la **formule du crible** :

$$\mathbf{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \mathbf{P}(A_3) - \mathbf{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbf{P}(A_1 \cap A_3) - \mathbf{P}(A_2 \cap A_3)$$

Notez avec soin la disparition étonnante de $\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ qui est nulle car les souris doivent bien aller quelque part, non ?

$$\boxed{\mathbf{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{2^n - 1}{3^{n-1}}}$$

2. Tout d'abord $X(\Omega) = [\![0, 2]\!]$ et

► $\mathbf{P}([X = 2]) = 3\left(\frac{1}{3^n}\right) = \frac{1}{3^{n-1}}$ (toutes les souris vont soit dans la cage 1, soit toutes dans la cage 2, soit toutes dans la cage 3).

► $\mathbf{P}([X = 0]) = 1 - \mathbf{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - \left(\frac{2^n - 1}{3^{n-1}}\right) = \frac{3^{n-1} - 2^n + 1}{3^{n-1}}$ (cf **a.**)

► Comme $\mathbf{P}([X = 1])$ est un peu fastidieux à calculer, profitons du fait que la famille $([X = k])_{k \in [\![0,2]\!]}$ constitue un système complet d'événements, ainsi :

$$\mathbf{P}([X = 1]) = 1 - \mathbf{P}([X = 0]) - \mathbf{P}([X = 2]) = \frac{2^n - 2}{3^{n-1}}$$

[2] autrement dit une seule face.

Conclusion

$$\boxed{\begin{array}{l} X(\Omega) = [\![0,2]\!] \\ \mathbf{P}([X=0]) = \dfrac{3^{n-1}-2^n+1}{3^{n-1}} \\ \mathbf{P}([X=1]) = \dfrac{2^n-2}{3^{n-1}} \\ \mathbf{P}([X=2]) = \dfrac{1}{3^{n-1}} \end{array}}$$

27 Une fois les p entiers choisis, il y a qu'une façon de les ranger en une suite strictement croissante : on commence par le plus petit, ..., et on finit par le plus grand ! Il existe $\binom{N}{p}$ façons de choisir p entiers distincts deux à deux dans l'intervalle $[\![1,N]\!]$ et qu'une façon de les ranger dans l'ordre strictement croissant. La variable X prend ses valeurs entre 1 (si $u_2 < u_1$) et N.

- $\mathbf{P}([X>N]) = 0$
- $\mathbf{P}([X>N-1]) = \mathbf{P}([X=N]) = \dfrac{1}{N!}$ (i) (car il n'y a qu'une seule façon d'obtenir l'événement $[X=n]$, à savoir $\omega = (1,2,\ldots,N)$, parmi les $N!$ façons équiprobables de vider l'urne).
- Si $k \in [\![1,N-2]\!]$ réaliser l'événement $[X>k]$ c'est obtenir une suite ω telle que $u_1 < u_2 < \cdots < u_k < u_{k+1}$. Il existe $\binom{N}{k+1}(N-(k+1))!$ telles suites ω, $\binom{N}{k+1}$ étant le nombre de façons de choisir et de ranger les $k+1$ premiers termes de cette suite, et à chaque fois il reste à placer les $N-(k+1)$ numéros restants dans un ordre quelconque. Par équiprobabilité de tous les événements élémentaires, on a donc

$$\mathbf{P}([X>k]) = \frac{\binom{N}{k+1}(N-(k+1))!}{N!} = \frac{1}{(k+1)!}$$

La formule est donc aussi valable pour $k=N-1$ selon (i) et également pour $k=0$ car l'événement $[X>0]$ est quasi-certain.

Conclusion :

$$\boxed{\forall k \in [\![0,N-1]\!], \quad \mathbf{P}([X>k]) = \frac{1}{(k+1)!}}$$

Pour $k \in [\![1,N-1]\!]$, on a

$$\mathbf{P}([X=k]) = \mathbf{P}([X>k-1]) - \mathbf{P}([X>k]) = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$$

et

$$\mathbf{P}([X=N]) = \frac{1}{N!}$$

Par télescopage, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N} \mathbf{P}([X=k]) &= \sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) + \frac{1}{N!} \\ &= 1 - \frac{1}{N!} + \frac{1}{N!} \\ &= \boxed{1} \end{aligned}$$

28 La variable X_1 prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$, et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement $[X_1 = k]$ est réalisé si, et seulement si, l'on obtient une succession ininterrompue de k "pile" suivie d'un "face" soit de k "face" suivie d'un "pile". Par **indépendance** et **disjonction**, il vient donc

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}([X_1 = k]) = p^k q + q^k p}$$

29 La variable X_k représente le nombre de tirages séparant les apparitions de r et $r+1$ numéros différents. L'événement $[X_k = j]$ est réalisé si, et seulement si, après avoir obtenu k numéros distincts, il a fallu attendre j parties pour obtenir un numéro différent des k numéros distincts déjà sortis. Donc, par indépendance des résultats des différents tirages

$$\boxed{\forall k \in [\![1, N-1]\!], \quad \forall j \in \mathbf{N}^*, \quad \mathbf{P}([X_k = j]) = \left(\frac{k}{N}\right)^{j-1}\left(\frac{N-k}{N}\right)}$$

30 Sans commentaire particulier, N suit une loi du nombre d'échecs qui précèdent le premier succès lors d'une série illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre $\dfrac{1}{3}$

$$\begin{array}{rcl}\forall n \in \mathbf{N},\ \mathbf{P}([N=n]) & = & \mathbf{P}(B_1 \cap \ldots \cap B_n \cap N_{n+1}) = \mathbf{P}(B_1) \times \cdots \times \mathbf{P}(B_n) \times \mathbf{P}(N_{n+1}) \\ & & \text{par indépendance des événements}\end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \quad \mathbf{P}([N=n]) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

Notez bien qu'il faut marquer l'arrêt des échecs au rang n en introduisant l'événement N_{n+1}. La variable X suit une loi géométrique sur $\mathbf{N}$ mais chutttt ... il ne faut pas le dire car c'est hors programme ! Ou bien vous dites que

$$\boxed{N + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{3}\right)}$$

31 Le mobile réalise une succession de n épreuves de Bernoulli à deux issues possibles (où le succès est d'effectuer un saut d'une unité) indépendantes (les sauts étant indépendants) et de même paramètre $1/2$. Ainsi

$$\boxed{Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1/2)}$$

Autrement dit

$$\boxed{Y_n(\Omega) = [\![0, n]\!], \quad \mathbf{P}([Y_n = k]) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}}$$

32 La variable Q prend ses valeurs dans $\mathbf{N}$.

▶ Calcul de $\mathbf{P}([Q=0])$. Nous avons les équivalences, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\begin{array}{rl} & [Q(\omega) = 0] \\ \iff & \left[0 \leq \dfrac{X(\omega)}{n} < 1\right] \\ \iff & [0 \leq X(\omega) < n] \\ \iff & [1 \leq X(\omega) \leq n-1]\end{array}$$

En posant $q = 1 - p$, on sait que pour tout entier k non nul, $\mathbf{P}([X=k]) = pq^{k-1}$, d'où

$$\begin{array}{rcl}\mathbf{P}([Q=0]) & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} pq^{k-1} \\ & = & p\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} q^{k-1} \\ & = & p\dfrac{1-q^{n-1}}{1-q} \\ & = & 1 - q^{n-1}\end{array}$$

▶ Calcul de $\mathbf{P}([Q=k])$ pour k non nul. Nous avons les équivalences, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\begin{array}{rl} & [Q(\omega) = k] \\ \iff & \left[k \leq \dfrac{X(\omega)}{n} < k+1\right] \\ \iff & [nk \leq X(\omega) < nk + n] \\ \iff & [nk \leq X(\omega) \leq nk + n - 1]\end{array}$$

D'où

$$\begin{aligned}\forall k \geq 1,\ \mathbf{P}([Q=k]) &= \sum_{i=nk}^{nk+n-1} pq^{i-1} \\ &= p\sum_{i=nk}^{nk+n-1} q^{k-1} \\ &= p\sum_{i=nk-1}^{nk+n-2} q^{k} \\ &= pq^{kn-1}\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) \\ &= q^{kn-1}(1-q^n)\end{aligned}$$

Conclusion

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\quad \mathbf{P}([Q=k]) = \begin{cases} 1-q^{n-1} & \text{si} \quad k=0 \\ q^{kn-1}(1-q^n) & \text{si} \quad k \geq 1\end{cases}}$$

33 Les tirages ayant lieu avec remise, X suit une loi binomiale de paramètres n et p, où p dépend de la valeur de k, ce qui nous oblige à distinguer plusieurs cas

- Si N est impair et si $k = \dfrac{N+1}{2}$, alors $k = N+1-k$ et $p=0$.
- Si N est pair et $k = \dfrac{N}{2}$, alors $p=0$, puisqu'il n'y a aucun entier strictement compris entre $\dfrac{N}{2}$ et $\dfrac{N}{2}+1$.
- Si $k+1 \leq N-k$, i.e. $k \leq \dfrac{N+1}{2}$, alors

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{N-2k}{N}\right)}$$

- Si $k+1 > N-k$, i.e. $k > \dfrac{N+1}{2}$, alors

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{2k-N+2}{N}\right)}$$

34 Voici une démo courte et simple. Tout d'abord T prend ses valeurs dans $[\![k,+\infty[\![$. Pour tout entier n supérieur ou égal à k, l'événement $[T=n]$ est réalisé si et seulement si l'on obtient $(k-1)$ fois pile au cours des $(n-1)$ premiers lancers, le $n^{\text{ème}}$ lancer amenant pile. Soit par indépendance des résultats des différents lancers :

$$\boxed{\forall n \geq k,\quad \mathbf{P}([T=n]) = \binom{n-1}{k-1}p^{k-1}q^{n-k}p = \binom{n-1}{k-1}p^kq^{n-k}}$$

On dit que la variable T suit une loi de Pascal, mais il ne faut surtout pas le dire, car elle est hors programme !

35 1. Tout d'abord $\mathbf{P}([T_n > 0]) = 1$ et $\mathbf{P}([T_n > n]) = 0$.
Pour tout entier k de $[\![1, n-1]\!]$, l'événement $[T_n > k]$ est réalisé si et seulement si les résultats des $k+1$ premiers tirages forment une suite strictement croissante. Les tirages successifs ayant lieu sans remise, il y a A_n^{k+1} façons différentes et équiprobables d'extraire $k+1$ jetons et $\binom{n}{k+1}$ manières d'obtenir un tirage strictement croissant (cela a déjà été expliqué maintes fois).
Conclusion

$$\boxed{\forall k \in [\![1, n-1]\!],\quad \mathbf{P}([T_n > k]) = \frac{\binom{n}{k+1}}{A_n^{k+1}} = \frac{1}{(k+1)!}}$$

Le résultat reste valable pour $k=0$.

2. Pour tout entier $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$\mathbf{P}([T_n = k]) = \mathbf{P}([T_n > k-1]) - \mathbf{P}([T_n > k]) = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$$

et

$$\mathbf{P}([T_n = n]) = \frac{1}{n!}$$

car la seule issue possible est $\omega = (1, 2, \ldots, n)$.
En conclusion

$$\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \mathbf{P}([T_n = k]) = \begin{cases} \dfrac{1}{k!} - \dfrac{1}{(k+1)!} & \text{si} \quad k \in [\![1, n-1]\!] \\ \dfrac{1}{n!} & \text{si} \quad k = n \end{cases}}$$

36 Soit $N > 2$. La variable aléatoire X prend ses valeurs dans $\{n, \ldots, N\}$. Pour tout $i \in \{n, \ldots, N\}$, l'événement $[X = k]$ est réalisé si et seulement si on obtient un lot constitué de $n-1$ boules dont le numéro est compris entre 1 et $k-1$ (soit $\binom{k-1}{n-1}$ choix possibles), la $n^{\text{ème}}$ boule tirée étant la boule numéro k (un seul choix). Ainsi

$$\boxed{\forall k \in \{n, \ldots, N\}, \quad \mathbf{P}([X = k]) = \frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}}$$

37 Nous pouvons considérer qu'il y a "échec" au $i^{\text{ème}}$ coup si le joueur tire un numéro différent du précédent (de probabilité $\dfrac{5}{6}$). Il y a succès dans le cas contraire. Les échecs et succès sont indépendants car les tirages le sont. Donc :

$$\boxed{\mathbf{P}([X = 0]) = \mathbf{P}([X = 1]) = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in X(\Omega) = \mathbb{N}^* - \{1\}, \quad \mathbf{P}([X = n]) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \frac{1}{6}}$$

D'autre part $(X - 1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}([X - 1 = n]) = \mathbf{P}([X = n + 1]) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \frac{1}{6}$$

Autrement dit

$$\boxed{X - 1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{6}\right)}$$

38 Notons G la variable associée au gain et X la variable associée au numéro tiré. Nous avons facilement :

$$G = (-1)^X X$$

avec

$$G(\Omega) = \left\{(-1)^k k \mid 0 \leq k \leq n\right\}$$

Alors comme $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0, n]\!])$,

$$\boxed{\mathbf{P}\left(\left[G = (-1)^k k\right]\right) = \mathbf{P}([X = k]) = \frac{1}{n+1}}$$

39 1. Au minimum on effectue deux tirages pour effectuer la comparaison "la plus courte en essais" et au maximum $n+1$ si les numéros viennent dans l'ordre suivant $(n, n-1, n-2, \ldots, 2, 1)$. Ainsi

$$\boxed{X(\Omega) = [\![2, n]\!]}$$

Selon les valeurs prises par la variable X, il vient sans peine que

$$\boxed{\mathbf{P}([X \geq 2]) = 1}$$

L'événement $[X \geq 3]$ est réalisé si et seulement si les numéros n_1 et n_2 obtenus lors des deux premiers tirages vérifient $n_1 > n_2$. Or un tirage quelconque est une **2−liste** d'éléments de $[\![1, n]\!]$ (il y en a n^2 possibles) et un tirage favorable est une **suite strictement décroissante de 2 éléments** de $[\![1, n]\!]$ (il y a $\binom{n}{2}$ telles suites). Comme tous les numéros sont équiprobables, l'univers est muni de la probabilité uniforme et la **relation de Laplace** nous donne

$$\boxed{\mathbf{P}([X \geq 3]) = \frac{\operatorname{Card}([X \geq 2])}{\operatorname{Card} \Omega'} = \frac{1}{n^2}\binom{n}{2}}$$

Vous imaginez bien que la valeur du dénominateur ne représente pas du tout le cardinal de l'univers Ω. Est-ce bien clair ? ? ? *Nous avons en fait pris comme modèle* Ω' *l'ensemble des* $2-$ *listes de l'ensemble* $E = [\![1, n]\!]$. Tous les tirages avec remise se font au hasard, donc tous les événements élémentaires sont équiprobables et on munit Ω' de la probabilité uniforme.
On en déduit que

$$\boxed{\mathbf{P}([X = 2]) = \mathbf{P}([X \geq 2]) - \mathbf{P}([X \geq 3]) = 1 - \frac{1}{n^2}\binom{n}{2}}$$

2. L'événement $[X \geq k]$ est réalisé si et seulement si les $\boldsymbol{k-1}$ premiers numéros constituent une **suite strictement décroissante** d'éléments de $[\![1, n]\!]$, par conséquent

$$\boxed{\forall k \in [\![2, n+1]\!], \quad \mathbf{P}([X \geq k]) = \frac{\operatorname{Card}([X \geq k])}{\operatorname{Card} \Omega'} = \frac{1}{n^{k-1}}\binom{n}{k-1}}$$

Cette fois-ci Ω' est l'ensemble des $(k-1)-$ listes de l'ensemble $E = [\![1, n]\!]$**.** En effet

$$[X \geq k] = [X > k] = \{(i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}) \in \Omega' \mid i_1 > i_2 > \cdots > i_{k-1}\}$$

D'autre part tous les tirages avec remise se font au hasard, donc tous les événements élémentaires sont équiprobables et on munit Ω' de la probabilité uniforme.
Remarquer que la formule reste valable pour $k = n+1$ puisque

$$\mathbf{P}([X \geq n+1]) = \mathbf{P}([X = n+1]) = \frac{1}{n^n} \times \frac{n}{n} = \frac{1}{n^{n+1-1}}\binom{n}{n+1-1}$$

3. Par conséquent pour chaque entier $k \in [\![2, n]\!]$,

$$\mathbf{P}([X = k]) = \mathbf{P}([X \geq k]) - \mathbf{P}([X \geq k+1]) = \frac{1}{n^{k-1}}\binom{n}{k-1} - \frac{1}{n^k}\binom{n}{k} \tag{1}$$

Comme nous avons vu que

$$\mathbf{P}([X = n+1]) = \frac{1}{n^n}$$

le résultat (1) reste valable pour $k = n+1$ en "jouant" avec la convention habituelle concernant les coefficients binomiaux. Finalement

$$\boxed{\forall k \in [\![2, n+1]\!], \quad \mathbf{P}([X = k]) = \frac{1}{n^{k-1}}\binom{n}{k-1} - \frac{1}{n^k}\binom{n}{k}}$$

$\boxed{40}$ Nous avons $L_1(\Omega) = \mathbf{N}^*$. Notons pour tout entier k non nul, P_k (respectivement F_k) l'événement : "obtenir pile (respectivement face) au $k^{\text{ème}}$ lancer". Ainsi

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbf{N}^*, \ \mathbf{P}([L_1 = n]) &= \mathbf{P}\left(P_1 \cap \ldots \cap P_n \cap F_{n+1} \bigsqcup F_1 \cap \ldots \cap F_n \cap P_{n+1}\right) \\
&= \mathbf{P}(P_1 \cap \ldots \cap P_n \cap F_{n+1}) + \mathbf{P}(F_1 \cap \ldots \cap F_n \cap P_{n+1}) \\
&\quad \text{par } \sigma-\text{additivité de } \mathbf{P}. \\
&= p^n q + q^n p \\
&\quad \text{par indépendance des événements}
\end{aligned}$$

Conclusion

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \mathbf{P}([L_1 = n]) = p^n q + q^n p}$$

41 Nous avons $X(\Omega) = [\![1,6]\!]$ et pour tout k de $X(\Omega)$, $\mathbf{P}([X=k]) = \lambda k$ avec λ tel que $\sum\limits_{k=1}^{6} \lambda k = 1$ ce qui donne $\lambda = \dfrac{1}{21}$ après calcul.
Conclusion

$$\boxed{\forall k \in [\![1,6]\!], \quad \mathbf{P}([X=k]) = \frac{k}{21}}$$

42 Soit L le nombre aléatoire de lignes non globalement justes. L prend ses valeurs dans $\{0,1,\ldots,50\}$ et le nombre de points obtenus par le candidat est :

$$X = 4(50-L) - L = 200 - 5L$$

Donc $X(\Omega) = \{200 - 5k \mid k \in \{0,1,\ldots,50\}\}$ et pour tout $k \in \{0,1,\ldots,50\}$,

$$\mathbf{P}([X = 200-5k]) = \mathbf{P}([L=k]) \text{ car } x \mapsto 200-5x \text{ est bijective}$$

Or L suit une loi binomiale de paramètres $(50,p)$ où $p = 1 - 1/2^4 = 15/16$. En effet une ligne est considérée comme correcte si les 4 réponses sont correctes, et ceci avec la probabilité de $1/16$. Les réponses étant considérées indépendamment ligne par ligne. Ainsi

$$\boxed{\forall k \in \{0,1,\ldots,50\}, \quad \mathbf{P}([X = 200-5k]) = \binom{50}{k} p^k (1-p)^{50-k}}$$

Ne dites surtout pas que X est binomiale !

43
1. Tout d'abord $X(\Omega) = [\![k,n]\!]$. Comme les k boules sont tirées au hasard nous alllons munir l'univers de la probabilité uniforme[3] et procéder par dénombrement. Nous avons :

$$\Omega = \left\{(n_1, n_2, \ldots, n_k) \in [\![1,n]\!]^k \mid n_1 \neq n_2 \neq \cdots \neq n_k\right\}$$

ainsi $\text{Card}(\Omega) = A_n^k$. D'autre part

$$\forall i \in [\![k,n]\!], \quad [X=i] = \left\{(n_1,\ldots,n_k) \in [\![1,n]\!]^k \mid n_1 \neq n_2 \neq \cdots \neq n_k \text{ et } \max(n_1,\ldots,n_k) = i\right\}$$

et $\text{Card}([X=i]) = 1 \times \binom{i-1}{k-1} \times k!$ où

- ▶ Le nombre 1 représente le nombre de choix du plus grand numéro tiré (qui je le répète est fixé).
- ▶ L'entier $\binom{i-1}{k-1}$ représente le nombre de choix des $i-1$ autres numéros pris dans l'ensemble $[\![1,k-1]\!]$.
- ▶ Enfin $k!$ représente le nombre de placements des k numéros une fois ceux-ci tirés.

Conclusion

$$\boxed{\forall i \in [\![k,n]\!], \quad \mathbf{P}([X=i]) = \frac{\binom{i-1}{k-1} \times k!}{A_n^k} = \frac{\binom{i-1}{k-1}}{\binom{n}{k}}}$$

2. Nous avons $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$. Maintenant que le tirage se fait avec remise il sera bien plus astucieux de calculer $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\mathbf{P}([X \leq i])$ au lieu de $\mathbf{P}([X=i])$ car les répétitions éventuelles des boules sont difficiles à gérer. L'événement $[X \leq i]$ sera réalisé si et seulement si tous les numéros tirés sont inférieurs ou égaux à i (le max pouvant être atteint au moins une fois).
Ainsi

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \mathbf{P}([X \leq i]) = \left(\frac{i}{n}\right)^k$$

et

$$\mathbf{P}([X=i]) = \mathbf{P}([X \leq i]) - \mathbf{P}([X \leq i-1])$$

la formule reste valable pour $i=1$ car $\mathbf{P}([X \leq 0]) = 0$.
Conclusion :

$$\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \mathbf{P}([X=i]) = \left(\frac{i}{n}\right)^k - \left(\frac{i-1}{n}\right)^k}$$

[3] Car nous sommes dans le cadre de l'**équiprobabilité.**

44 Nous avons

$$\Omega = \mathcal{P}_a(E_n) \times \mathcal{P}_b(E_n)$$

de cardinal

$$\text{Card}(\mathcal{P}_4(E_7)) \times \text{Card}(\mathcal{P}_2(E_7)) = \tbinom{7}{4}\tbinom{7}{2}$$

et muni de la probabilité uniforme.

- L'événement $[X = 0]$ est réalisé si, et seulement si, les parties A et B sont disjointes. On peut choisir A de $\binom{7}{4}$ façons, et une fois A choisi, B est une partie de 2 éléments de $E_7 - A$ de cardinal 3. Il existe donc $\binom{3}{2}$ façons de choisir B et les bergers de retour de Rethymnon[4] nous annoncent que

$$\text{Card}([X = 0]) = \tbinom{7}{4}\tbinom{3}{2}$$

et avec l'aide de Pierre-Simon Laplace

$$\boxed{\mathbf{P}([X = 0]) = \frac{\binom{7}{4}\binom{3}{2}}{\binom{7}{4}\binom{7}{2}} = \frac{1}{7}}$$

- De même pour réaliser l'événement $[X = 2]$, il faut que B soit inclus dans A. La partie A est toujours choisie de $\binom{7}{4}$ façons et, une fois A choisi, on peut choisir B de $\binom{4}{2}$ car $B \in \mathcal{P}(A)$. De retour de Vaï[5], les bergers nous assurent que

$$\text{Card}([X = 2]) = \tbinom{7}{4}\tbinom{4}{2}$$

et Laplace, entre deux cours de mécanique à l'Académie Royale des Sciences, de dire que

$$\boxed{\mathbf{P}([X = 2]) = \frac{\binom{7}{4}\binom{4}{2}}{\binom{7}{4}\binom{7}{2}} = \frac{2}{7}}$$

- Comme $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$, il vient classiquement

$$\boxed{\mathbf{P}([X = 1]) = 1 - \mathbf{P}([X = 0]) - \mathbf{P}([X = 2]) = \frac{4}{7}}$$

45 Nous avons $N_p(\Omega) = \{0, \ldots, n\}$. Introduisons pour $j \in \{0, \ldots, p\}$ les événements notés U_j :"le tirage se fait dans l'urne U_j". La famille $(U_j)_{j \in \{0,\ldots,p\}}$ forme un **système complet d'événements** de probabilités non nulles, d'où selon la **formule des probabilités totales** il vient pour tout k de $\{0, \ldots, n\}$,

$$\mathbf{P}([N_p = k]) = \sum_{j=0}^{p} \mathbf{P}_{U_j}([N_p = k])\,\mathbf{P}(U_i)$$

Comme la loi conditionnelle de N_p sachant U_j suit la loi binomiale de paramètres $(n, j/p)$ il vient

$$\boxed{\forall k \in \{0, \ldots, n\}, \quad \mathbf{P}([N_p = k]) = \sum_{j=0}^{p} \binom{n}{k}\left(\frac{j}{p}\right)^k \left(1 - \frac{j}{p}\right)^{n-k} \frac{1}{p+1}}$$

46 Nous avons $X(\Omega) = \{2k + 1,\ 0 \leq k \leq n\}$ et l'événement $[X = 2k + 1]$ correspond à l'union disjointe des événements "on a obtenu $2k + 1$ jetons blancs et $2n - 2k$ jetons noirs parmi les $2n + 1$" et "on a obtenu $2k + 1$ jetons noirs et $2n - 2k$ jetons blancs parmi les $2n + 1$". Par $\sigma-$additivité de $\mathbf{P}$ et modèle binomial associé on obtient

$$\boxed{\forall k \in \{0, \ldots, n\}, \quad \mathbf{P}([X = 2k + 1]) = 2\frac{\binom{2n+1}{2k+1}}{2^{2n+1}} = \frac{\binom{2n+1}{2k+1}}{2^{2n}}}$$

[4] En Crête !
[5] Toujours en Crête !

47 1. Notons $\forall (i,k) \in (\llbracket 1,4 \rrbracket, \mathbf{N})$, $S_i^{(k)}$ l'événement : "le i^e spot est allumé à l'instant $t = k$". Ainsi la probabilité que le spot S_1 reste constamment allumé jusqu'à l'instant n est

$$\mathbf{P}\left(\left[S_1^{(0)} \cap S_1^{(1)} \cap S_1^{(2)} \cap \ldots \cap S_1^{(n)}\right]\right) = 1 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \cdots \times \frac{1}{4}$$

soit

$$\boxed{\mathbf{P}\left(S_1^{(0)} \cap S_1^{(1)} \cap S_1^{(2)} \cap \ldots \cap S_1^{(n)}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^n} \qquad (2)$$

Attention le texte ne nous demande pas encore de déterminer la loi de X (cela ne se fera qu'à partir de la question suivante) mais simplement de vérifier qu'en faisant un raisonnement à partir du résultat (2) nous avons bien $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}([X = n]) = 1$.

La probabilité que S_1 reste toujours allumé vaut clairement 0, en appliquant le **théorème de la limite monotone** puisque la suite d'événement $\left(S_1^{(0)} \cap S_1^{(1)} \cap S_1^{(2)} \cap \ldots \cap S_1^{(n)}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ est clairement décroissante, et que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$. Moralité, l'événement $\bigcap\limits_{k=0}^{+\infty} S_1^{(k)}$ est **quasi-impossible**, ce qui entraine qu'il existe un instant t_0 où S_1 s'éteint, et comme à l'instant $t_0 + 1$ les spots sont équiprobables, nous sommes **quasi-certains** qu'il existera un instant pour lequel S_2 va s'allumer (si ce n'est pas à l'instant $t_0 + 1$ ce sera plus tard). Ainsi

$$\boxed{\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad [X = k] \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}([X = n]) = 1}$$

et

$$\boxed{X \text{ est bien une variable aléatoire}}$$

2. Il y a une chance sur quatre que le spot reste allumé à l'instant $t = 1$, (le spot s'allume à l'instant 1). D'où il vient

$$\boxed{\mathbf{P}([X = 1]) = \frac{1}{4}}$$

Fixons-nous un peu les idées en examinant shématiquement les situations possibles. Nous avons

$S_1^{(0)}$	$S_1^{(1)}$	$S_2^{(2)}$

soit

$S_1^{(0)}$	$S_3^{(1)}$	$S_2^{(2)}$

D'où il vient

$$\mathbf{P}([X = 2]) = \mathbf{P}\left(\left(S_1^{(0)} \cap S_1^{(1)} \cap S_2^{(2)}\right) \uplus \left(S_1^{(0)} \cap S_3^{(1)} \cap S_2^{(2)}\right)\right)$$

et selon la $\sigma-$additivité de $\mathbf{P}$ associée à la **formule des probabilités composées** (légitime d'application)

$$\mathbf{P}([X = 2]) = \mathbf{P}\left(S_1^{(0)}\right) \mathbf{P}_{S_1^{(0)}}\left(S_1^{(1)}\right) \mathbf{P}_{S_1^{(1)} \cap S_1^{(0)}}\left(S_2^{(2)}\right) + \mathbf{P}\left(S_1^{(0)}\right) \mathbf{P}_{S_1^{(0)}}\left(S_3^{(1)}\right) \mathbf{P}_{S_3^{(1)} \cap S_1^{(0)}}\left(S_2^{(2)}\right)$$

soit

$$\boxed{\mathbf{P}([X = 2]) = \left(1 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}\right) + \left(1 \times \frac{1}{4} \times 1\right) = \frac{5}{16}}$$

3. Là encore schématisons les différentes possibilités

$S_1^{(0)}$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$S_1^{(n-1)}$	$S_2^{(n)}$

$S_1^{(0)}$	$\cdots$	$\cdots$	$S_1^{(n-2)}$	$S_3^{(n-1)}$	$S_2^{(n)}$

$S_1^{(0)}$	$\cdots$	$S_1^{(n-3)}$	$S_4^{(n-2)}$	$S_3^{(n-1)}$	$S_2^{(n)}$

Alors en reprenant la même façon de calculer qu'à la question précédente, nous obtenons

$$\forall n \geq 3, \quad \mathbf{P}([X = n]) = \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}$$

soit encore

$$\boxed{\forall n \geq 3, \quad \mathbf{P}([X=n]) = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}\left(1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2\right) = \frac{21}{4^n}}$$

48 La variable X_n représente la longueur de la dernière séquence de Pile, après le dernier Face à l'issue du $n^{\text{ème}}$ lancer (cette séquence pouvant être de longueur nulle). Nous avons donc

$$X_n(\Omega) = \{0, \ldots, n\}$$

- L'événement $[X_n = 0]$ est l'événement "le dernier lancer est Face" donc

$$\boxed{\mathbf{P}([X_n = 0]) = 1 - p_n}$$

- L'événement $[X_n = 1]$ est l'événement "on a eu Pile au $n^{\text{ème}}$ lancer et Face au $(n-1)^{\text{ème}}$ lancer", donc

$$\boxed{\mathbf{P}([X_n = 1]) = p_n(1 - p_{n-1})}$$

- Plus généralement, pour tout entier $k \geq 2$, l'événement $[X_n = k]$ est l'événement "on a eu Pile aux lancers $n, n-1, \ldots, n-k+1$ et Face au $(n-k)^{\text{ème}}$ lancer", donc

$$\boxed{\forall k \in \{2, \ldots, n\} \quad \mathbf{P}([X_n = k]) = p_n p_{n-1} \ldots p_{n-k+1}(1 - p_{n-k})}$$

49 Nous avons sans commentaire $Z(\Omega) = \{0, \ldots, n-1\}$.

- L'événement $[Z = 0]$ est réalisé si, et seulement si, on obtient trois fois la même boule (trois fois le numéro 1 soit trois fois le numéro 2 soit … soit trois fois le numéro n). Ainsi

$$\mathbf{P}([Z=0]) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\right)^3 = \frac{1}{n^2}$$

- Pour k non nul, l'événement $[Z = k]$ est réalisé si, et seulement si, le plus petit numéro obtenu valant i, le plus grand vaut alors $i+k$, i pouvant varier de 1 jusqu'à $n-k$. Il existe $6(k-1)$ tirages réalisant $\min = i$, $\max = i+k$, appartenant à l'ensemble

$$\{(i, i+k, *), (i+k, i, *)\,(i, *, i+k)\,(i+k, *, i)\,(*, i, i+k)\,(*, i+k, i), * \in \{i+1, \ldots, i+k-1\}\}$$

(le troisième numéro obtenu étant strictement compris entre i et $i+k$) et il existe 3 tirages où le min est doublé et également 3 tirages où le max est doublé. Ainsi

$$\boxed{\forall k \in \{1, \ldots, n-1\} \quad \mathbf{P}([Z=k]) = \sum_{k=1}^{n-k}\frac{6(k-1)+6}{n^3} = \frac{6k(n-k)}{n^3}}$$