Le 29/04/2020 à 7H55

Tous les résultats du cours en un clin d'oeil

Coobook

spicesagros.fr

16 mars 2020

Table des matières

1 Légendes et abréviations

- $\boxed{\textbf{D}}$ Définition
- $\boxed{\textbf{T}}$ Théorème
- $\boxed{\textbf{P}}$ Proposition
- $\boxed{\textbf{Pr}}$ Propriété (s)
- $\boxed{\textbf{C}}$ Corollaire
- $\boxed{\textbf{R}}$ Remarque
- $\boxed{\textbf{E}}$ Exemple
- HP : résultat hors programme mais ...
- ⓒ : résultat valable en continu
- Ⓢ : résultat valable en discret
- $\bigsqcup$: union disjointe
- ssrcv : sous réserve de convergence
- ssr |cv| : sous réserve de convergence absolue
- i.i.d. : variables indépendantes et identiquement distribuées
- SCE : système complet d'événements
- v.a.r. : variable aléatoire
- v.a.r.d. : variable aléatoire discrète
- v.a.r.a.d. : variable aléatoire à densité
- $\sum_i u_i < \infty$: série simple convergente (symbole hors programme à ne surtout pas utiliser)
- $\sum_i u_i = \infty$: série simple divergente (symbole hors programme à ne surtout pas utiliser)
- $\sum_{i,j} u_{i,j} < \infty$: : série double convergente (symbole hors programme à ne surtout pas utiliser)
- $\sum_{i,j} u_{i,j} = \infty$: série double divergente (symbole hors programme à ne surtout pas utiliser)
- $\int_a^b f < \infty$: intégrale convergente (symbole hors programme à ne surtout pas utiliser)
- $\int_a^b f = \infty$: intégrale divergente (symbole hors programme à ne surtout pas utiliser)
- $A \perp\!\!\!\perp B$: A et B indépendants (le symbole hors programme à ne surtout pas utiliser)
- $X \perp\!\!\!\perp Y$: X et Y indépendantes (le symbole hors programme à ne surtout pas utiliser)
- $X_1 \perp\!\!\!\perp \ldots \perp\!\!\!\perp X_n$: $X_1, \ldots, X_n$ mutuellement indépendantes (le symbole hors programme à ne surtout pas utiliser)
- $\forall k \geq 1$, $\mathcal{L}^k$ désigne l'espace vectoriel des variables aléatoires admettant un moment d'ordre k (notation de l'ensemble hors programme à ne surtout pas utiliser)
- $\forall k \geq 1$, $\mathcal{L}_d^k$ désigne l'espace vectoriel des variables aléatoires discrète admettant un moment d'ordre k (notation de l'ensemble hors programme à ne surtout pas utiliser)
- P_X : loi de X
- $X \sim Y$: les variables X et Y suivent la même loi.
- $\mathcal{S}_X$ support de X.

2 Ensembles

$\boxed{\mathbf{D}}$ **Définition intuitive d'un ensemble**

C'est le tout formant une collection d'objets ayant une propriété commune. Chaque objet d'un ensemble est appelé élément, et écrire que x est un élément de A se note $x \in A$. Dans le cas contraire, on note $x \notin A$.

On dit que $A = B$ lorsque $\forall x \in A,\ x \in B$ et $\forall x \in B,\ x \in A$. Par contraposée $A \neq B$ lorsque $\exists x \in A,\ x \notin B$ ou $\exists x \in B,\ x \notin A$.

$\boxed{\mathbf{R}}$ L'ordre de l'écriture des éléments d'un ensemble n'a aucune importance, ainsi que leurs répétitions éventuelles. Par exemple : $\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\} = \{1, 1, 2, 3, 3, 3\}$.

$\boxed{\mathbf{D}}$ Soit A et B deux ensembles, on dira que B est un sous-ensemble de A ou que B est une partie de A si, et seulement si, tout élément de B est aussi un élément de A.

Ainsi : $B \subset A$ lorsque $\forall x \in B,\ x \in A$.

$\boxed{\mathbf{R}}$ $(A = B) \Leftrightarrow (A \subset B$ et $B \subset A)$.

$\boxed{\mathbf{D}}$ On appelle **ensemble des parties** de A, l'ensemble de tous les sous-ensembles de A, on le note $\mathcal{P}(A)$, il contient évidemment A lui-même et l'ensemble vide.

$\boxed{\mathbf{R}}$ ▶ Ecrire $A \subset E$ se traduit par $A \in \mathcal{P}(E)$ (on n'écrit jamais $A \in E$!).

▶ Ecrire $a \in A$ se traduit par $\{a\} \subset A$ (on n'écrit jamais $a \subset A$!).

$\boxed{\mathbf{D}}$ ▶ $A \cup B = \{x \in \Omega,\ x \in A$ ou $x \in B\}$.

▶ $\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I,\ x \in A_i\}$.

$\boxed{\mathbf{Pr}}$ ▶ $A \cup A = A$

▶ $A \cup B = B \cup A$

▶ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

▶ $A \subset A \cup B,\ B \subset A \cup B$

▶ $(A \subset B) \Leftrightarrow (A \cup B = B)$

▶ $\emptyset \cup A = A$

▶ $\Omega \cup A = \Omega$

▶ $A \cup A = \Omega$

$\boxed{\mathbf{Pr}}$ **Distributivités**

▶ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

▶ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)($

▶ $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup B = \bigcap_{i\in I} (A_i \cup B)$

▶ $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i\in I} (A_i \cap B)$

▶ $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cup B_j)$

▶ $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j)$

$\boxed{\mathbf{Pr}}$ **Lois de Morgan** où $\overline{A} = \complement_E A$

▶ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

▶ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

▶ $\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$

▶ $\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$ **(Lois de Morgan généralisées)**

$\boxed{\mathbf{Pr}}$ ▶ $(B = A) \Leftrightarrow (A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset) \Leftrightarrow (A \bigsqcup B = E)$

$\boxed{\mathbf{Pr}}$ ▶ $\overline{\Omega} = \emptyset$

▶ $\overline{\emptyset} = \Omega$

▶ $\overline{\overline{A}} = A$

▶ $\left(B = \overline{A}\right) \Leftrightarrow \left(A = \overline{B}\right)$

▶ $(A \subset B) \Leftrightarrow \left(\overline{B} \subset \overline{A}\right)$

$\boxed{\mathbf{D}}$ $A - B = \{x \in \Omega,\ x \in A$ et $x \notin B\}$

$\boxed{\mathbf{Pr}}$ ▶ $A - B = A \cap B$

▶ $A - B = A - (A \cap B)$

▶ $\overline{A} = \Omega - A$

▶ $((A - B) = A) \Leftrightarrow (A \cap B = \emptyset)$

$\boxed{\mathbf{D}}$ ▶ **Produit cartésien de deux ensembles**

$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A$ et $b \in B\}$.

▶ **Produit cartésien de n ensembles**

$A_1 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, ..., x_n) \mid x_1 \in A_1, ..., x_n \in A_n\}$

$\boxed{\mathbf{D}}$ Soit E un ensemble. Pour toute partie A de E, on définit la **fonction indicatrice** (ou **fonction caractéristique**) de A notée $\mathbf{1}_A$ par

$$\mathbf{1}_A : x \in E \mapsto \mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A \\ 0 & \text{si} \quad x \notin A \end{cases}$$

$\boxed{\mathbf{Pr}}$ ▶ $\forall x \in E,\ \mathbf{1}_\Omega(x) = 1,\ \mathbf{1}_\emptyset(x) = 0$

▶ $\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B$

▶ $\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B$

$\boxed{\mathbf{Pr}}$ $\bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$ signifie "*les événements A_n sont réalisés une infinité de fois*".

$\boxed{\mathbf{Pr}}$ $\bigcup_{n=0}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k$ signifie "*tous les événements A_n sont réalisés à partir d'un certain rang*".

3 Formules combinatoires

P Soit n un entier naturel,

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

D $\displaystyle\binom{n}{p} = \begin{cases} \dfrac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } 0 \leq p \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Pr ▶ $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ p \leq n,\ \displaystyle\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ **(symétrie)**

▶ $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ 1 \leq p \leq n,\ \displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$ (la formule sans nom !)

▶ $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ 1 \leq p \leq n,\ \displaystyle\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$ **(triangle de Pascal)**

T Formule du binôme de Newton

$$\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2,\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k a^{n-k}$$

C $\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2,\ k \leq n,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Pr $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$

T Vandermonde (HP)

$\forall (n_1, n_2, n) \in \mathbb{N}^3,\ n \leq n_1 + n_2,$

C $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

T Vandermonde généralisé (HP)

$\forall (N_1, \dots, N_k) \in \mathbb{N}^k,$

$$\sum_{\begin{cases} (n_1,\dots,n_k) \in [\![0,n]\!]^k \\ n_1+\dots+n_k = n \end{cases}} \binom{N_1}{n_1} \times \dots \times \binom{N_k}{n_k} = \binom{N_1 + \dots + N_k}{n}$$

Pr $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ p \leq n,\ \displaystyle\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} 1 = \binom{n}{p}$

Pr ▶ $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 2\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$

Pr Identité de Bernoulli

$$\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}.$$

D ▶ $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ p \leq n,\ \forall (a_p, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n-p+1},\ \displaystyle\prod_{k=p}^{n} a_k = a_p \times \dots \times a_n$

▶ On pose $\displaystyle\prod_{k=p}^{n} a_k = 1$ lorsque $p > n$

Pr Soit n un entier naturel,

- $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k = n!$
- $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (2k) = 2^n n!$
- $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$

4 Dénombrement

Pr ► Soit A et B deux ensembles tels que A est *fini* et $B \subset A$, alors $\text{Card}(B) \leq \text{Card}(A)$ et $\text{Card}(A - B) = \text{Card}(A) - \text{Card}(B)$

► Si $A \subset B$ et $\text{Card}(A) = \text{Card}(B)$ alors $A = B$

► $\text{Card}(A \bigsqcup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$

► $\text{Card}\left(\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \text{Card}(A_k)$

► $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\text{Card}\left(\prod_{k=1}^{n} A_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \text{Card}(A_k)$

T **Formule de Poincaré ou du crible pour deux ensembles**
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$

R La généralisation de cette formule a disparu du programme.

D **Partition d'un ensemble** : On dit que la famille d'événements $(A_i)_{i \in I}$ est une **partition** de E : $\forall i \in I, A_i = \emptyset$, $(\forall (i,j) \in I^2,\ i \neq j) \Rightarrow (Ai \cap Aj = \emptyset)$ et $\bigsqcup_{i \in I} A_i = E$.

Remarque : c'est la même déf. pour un SCE avec $E = \Omega$.

P **Lemme des bergers** : Soit E et F *deux ensembles finis* et f une application *surjective* de E vers F. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $y \in F$, $\text{Card}\left(f^{-1}(\{y\})\right) = p$, alors $\text{Card}(E) = p\,\text{Card}(F)$.

P **Nombre d'applications de E vers F** : $\text{Card}(\mathcal{A}(E,F)) = (\text{Card}(F))^{\text{Card}(E)}$

P **Nombre d'injections de E_p vers F_n** avec $\text{Card}(E_p) = p$, $\text{Card}(F_n) = n$ et $p \leq n$: A_n^p

P **Nombre d'arrangements de E_p vers F_n** avec $\text{Card}(E_p) = p$, $\text{Card}(F_n) = n$ et $p \leq n$: A_n^p

P **Nombre de permutations de E_n** avec $\text{Card}(E_n) = n \in \mathbb{N}^*$: $A_n^n = n!$

P **Nombre de $p-$listes de E_n** : n^p

P **Nombre de combinaisons de p éléments de E de cardinal n** avec $p \leq n$:
$\binom{n}{p} = \dfrac{n(n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{p!} = \dfrac{A_n^p}{p!}$ (la dernière égalité est HP)

P **Nombre de parties d'un ensemble E** : $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\text{Card}(E)}$

P **Problème des anagrammes (HP)** d'un mot de n lettres constitué de n_1 lettres $L_1, \ldots, n_p$ lettres L_p :
$\binom{n}{n_1} \times \binom{n-n_1}{n_2} \times \cdots \times \binom{n-n_1-\cdots-n_{p-1}}{n_p} = \dfrac{n!}{n_1! \times \cdots \times n_p!}$ (*nombre d'arrangements avec répétition*)

P **Nombre de couples** :

► $\text{Card}\left\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid i+j=n\right\} = n+1$

► $\text{Card}\left\{(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid i+j=n\right\} = n-1$

P **Nombre de suites** :

► $\text{Card}\left\{(x_1, \ldots, x_p) \in (\mathbb{N}^*)^p \mid 1 \leq x_1 < \cdots < x_p \leq n\right\} = \binom{n}{p}$

► $\text{Card}\left\{(x_1, \ldots, x_p) \in (\mathbb{N}^*)^p \mid 1 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_p \leq n\right\} = \binom{n+p-1}{p}$

E Exemples fondamentaux de tirages usuels

Type de tirage	Ordre	Répétitions d'éléments	Dénombrement
Successif avec remise	Oui	Oui	n^p $p-$listes
Successif sans remise	Oui	Non	A_n^p arrangements
Simultané	Non	Non	$\binom{n}{p}$ combinaisons

5 Espaces probabilisés

5.1 Tribu

$\boxed{\textbf{D}}$ **Tribu** : Tout ensemble de parties d'un ensemble Ω, *contenant Ω, stable par réunion au plus dénombrable et par passage au complémentaire*, s'appelle une **tribu** ou **$\sigma-$algèbre sur Ω**, souvent notée $\mathcal{A}$. Autrement dit :

▷ $\Omega \in \mathcal{A}$,

▷ $\forall A \in \mathcal{A}$, $\overline{A} \in \mathcal{A}$,

▷ pour toute suite $(A_n)_{n \geq n_0}$ d'événements de $\mathcal{A}$, $\bigcup\limits_{n=n_0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

$\boxed{\textbf{P}}$ $\emptyset \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ est stable pour $\cap$, $-$, Δ

$\boxed{\textbf{E}}$ ▶ $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ (tribu grossière, la plus triviale mais inexploitable)

▶ Si Ω est au plus dénombrable $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ (tribu complète, la plus fine)

$\boxed{\textbf{D}}$ **Tribu engendrée par une famille** : Soit $\mathcal{F} = \{A_i,\ i \in I\}$ une famille de sous-ensembles de Ω. Alors la tribu engendrée par $\mathcal{F}$ est la plus petite tribu sur Ω contenant tous les sous-ensembles A_i, $i \in I$. Elle est notée $\sigma(\mathcal{F})$.

$\boxed{\textbf{E}}$ $\boxed{\textbf{P}}$ $\{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$ est une tribu notée $\sigma(A)$, la plus petite engendrée par $A \in \mathcal{A}$

$\boxed{\textbf{E}}$ $\boxed{\textbf{P}}$ ▶ $\left\{\bigsqcup\limits_{\ell \in L} A_\ell \mid L \in \mathcal{P}(K)\right\}$ où $(A_k)_{k \in K}$ est un *SCE* est la tribu engendrée par le SCE et notée $\sigma\left((A_k)_{k \in K}\right)$

$\boxed{\textbf{D}}$ **Tribu borélienne de $\mathbb{R}$**

$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{]-\infty, x[\,,\ x \in \mathbb{R}\}) = \sigma(\{[x, +\infty[\ \ x \in \mathbb{R}\}) = \cdots$

$\boxed{\textbf{P}}$ **Quelle tribu utiliser le jour du concours ?**

▶ Ω est fini : $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$

▶ Ω est infini et dénombrable : $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$

▶ Ω est infini et indénombrable : dans le cadre du programme, on se cherche pas à déterminer $\mathcal{A}$.

5.2 Correspondance entre relations logiques et ensemblistes

Relation logique	Relation ensembliste
négation non	complémentation
conjonction et	intersection $\cap$
disjonction ou	réunion $\cup$
implication $\Longrightarrow$	inclusion $\subset$
équivalence $\Longleftrightarrow$	égalité $=$

5.3 Probabilité

$\boxed{\textbf{D}}$ **Axiomatique d'une probabilité** : Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable, on appelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application $\mathbf{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$ vérifiant : $\mathbf{P}(\Omega) = 1$, $\forall (A_k)_{k \in K}$ famille d'événements deux à deux disjoints $\sum\limits_k \mathbf{P}(A_k) < \infty$ et $\mathbf{P}\left(\bigsqcup\limits_{k \in K} A_k\right) = \sum\limits_{k \in K} \mathbf{P}(A_k)$ ($\sigma -$ *additivité* de $\mathbf{P}$).

$\boxed{\textbf{D}}$ On appelle **espace probabilisable** tout couple $(\Omega, \mathcal{A})$.

$\boxed{\textbf{D}}$ On appelle **espace probabilisé** tout triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

$\boxed{\textbf{D}}$ Soit $A \in \mathcal{A}$ est dit **négligeable** si $\mathbf{P}(A) = 0$.

$\boxed{\textbf{D}}$ Soit $A \in \mathcal{A}$ est dit **quasi-certain** si $\mathbf{P}(A) = 1$.

$\boxed{\textbf{Pr}}$ Soit A et B deux évts de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$,

▶ $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$

▶ $\mathbf{P}(A \bigsqcup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$

▶ $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$

▶ $\mathbf{P}(A - B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap B)$

▶ $(B \subset A) \Rightarrow (\mathbf{P}(A - B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(B))$

▶ $(B \subset A) \Rightarrow (\mathbf{P}(B) \leq \mathbf{P}(A))$ (**croissance de P**)

▶ $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$ (**formule du crible pour deux ensembles** dont la généralisation a disparu des programme)

▶ $\mathbf{P}\left(\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{P}(A_k)$ (**$\sigma-$additivité** de $\mathbf{P}$)

$\boxed{\textbf{T}}$ **Limite monotone**

▶ $\left((A_n)_{n \geq 0} \nearrow\right) \Rightarrow \left(\mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{P}(A_n)\right)$

▶ $\left((A_n)_{n \geq 0} \searrow\right) \Rightarrow \left(\mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{P}(A_n)\right)$

$\boxed{\textbf{C}}$ Soit $(A_n)_{n \geq 0}$ *une suite quelconque d'événements* :

$\mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k\right)$ et $\mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{k=0}^{n} A_k\right)$

$\boxed{\textbf{P}}$ Soit A et B deux évts de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, $\mathbf{P}(A \cup B) \leq \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$

$\boxed{\textbf{T}}$ **Relation de Laplace** (*cas d'équiprobabilité*) $\forall A \in \mathcal{A}$, $\mathbf{P}(A) = \dfrac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}$

$\boxed{\textbf{R}}$ *Il ne peut y avoir d'équiprobabilité lorsque l'univers est infini.*

$\boxed{\textbf{D}}$ **Indépendance d'événements**

▶ **2 événements** : $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$

▶ ***n* événements 2 à 2 indépendants** :

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $(i \neq j) \Rightarrow \mathbf{P}(A_i \cap A_j) = \mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}(A_j)$

▶ ***n* événements mutuellement indépendants** :

$\forall I \in \mathcal{P}(\llbracket 1,n \rrbracket),\ I \neq \emptyset,\ \mathbf{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} \mathbf{P}(A_i)$

▶ **Suites d'événements** : on se ramène au cas fini pour toutes sous-suites finies.

R ▶ *Pour* $n \geq 2$, $\mathbf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1) \times \mathbf{P}(A_2) \times \cdots \times \mathbf{P}(A_n)$.

▶ *L'indépendance mutuelle est plus forte que l'indépendance deux à deux.*

P Les assertions suivantes sont équivalentes pour deux évts A et B :

▶ $A \perp\!\!\!\perp B$

▶ $A \perp\!\!\!\perp \overline{B}$

▶ $\overline{A} \perp\!\!\!\perp B$

▶ $\overline{A} \perp\!\!\!\perp \overline{B}$

P Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'événements *indépendants* alors $(B_n)_{n\geq 0}$ où pour tout entier n, $B_n = A_n$ ou $\overline{A_n}$ *reste une suite d'événements indépendants.*

P $\left(A \perp\!\!\!\perp A\right) \Leftrightarrow (\mathbf{P}(A) = 0 \text{ ou } \mathbf{P}(A) = 1)$

D **Probabilité conditionnelle** : $\forall A \in \mathcal{A}$ tq $\mathbf{P}(A) \neq 0$, $\mathbf{P}_A(B) = \dfrac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A)}$

P Toutes les propriétés vues sur les probas inconditionnelles sont encore valables et s'appliquent aux probabilités conditionnelles.

P On dit que deux événements A et B où $\mathbf{P}(A) \neq 0$ et $\mathbf{P}(B) \neq 0$, sont **indépendants** si l'une des conditions équivalentes est vérifiée :

▶ $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)$

▶ $\mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B)$

▶ $\mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A)$

P **Formule des probabilités composées** : Soit $A_1, \ldots, A_n$, n événements tel que pour tout $n \geq 2$, $\mathbf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \neq 0$, alors :

$\mathbf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1)\,\mathbf{P}_{A_1}(A_2)\,\mathbf{P}_{A_1\cap A_2}(A_3) \times \cdots \times \mathbf{P}_{A_1\cap\ldots\cap A_{n-1}}(A_n)$

P **Formule des probabilités totales** : Soit $(A_k)_{k\in K}$ un *SCE* tel que $\forall k \in K$, $\mathbf{P}(A_k) \neq 0$, alors $\forall B \in \mathcal{A}$, $\sum_k \mathbf{P}_{A_k}(B)\,\mathbf{P}(A_k) < \infty$ et $\mathbf{P}(B) = \sum_{k\in K} \mathbf{P}_{A_k}(B)\,\mathbf{P}(A_k)$.

P **Bayes** : Soit $(A_k)_{k\in K}$ un *SCE* tel que $\forall k \in K$, $\mathbf{P}(A_k) \neq 0$, alors $\forall B \in \mathcal{A}$, $\mathbf{P}(B) \neq 0$, $\forall i \in K$, $\mathbf{P}_B(A_i) = \dfrac{\mathbf{P}_{A_i}(B)\,\mathbf{P}(A_i)}{\sum_{k\in K} \mathbf{P}_{A_k}(B)\,\mathbf{P}(A_k)}$.

6 Variables aléatoires réelles

6.1 Généralités

$\boxed{\textbf{D}}$ ⓢⓒ **:** $X : \Omega \to \mathbb{R}$ tq $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on a $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$.

$\boxed{\textbf{D}}$ **Support d'une variable aléatoire**

▶ ⓢ **:** On appelle **support** d'une variable **discrète** X l'ensemble noté S_X défini par $S_X = \{x \in X(\Omega) \mid \mathbf{P}([X = x]) \neq 0\}$.

▶ ⓒ **:** On appelle **support** d'une variable **continue** X l'ensemble noté S_X défini par $S_X = \{x \in X(\Omega) \mid f(x) \neq 0\}$.

$\boxed{\textbf{D}}$ ⓢ Soit X est une v.a.r.d. si $X(\Omega)$ est *au plus dénombrable et donc* $\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}([X = x]) = 1$.

$\boxed{\textbf{D}}$ Si $X(\Omega)$ est ∞ et indénombrable alors X n'est pas discrète (⚠ on ne peut rien dire d'autre sans étude supplémentaire !).

$\boxed{\textbf{D}}$ ⓢⓒ **:** $X = Y$ lorsque $\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) = Y(\omega)$.

$\boxed{\textbf{D}}$ ⓢⓒ **:** $X = Y$ p.s. lorsque $\mathbf{P}([X = Y]) = 1$.

$\boxed{\textbf{D}}$ ⓢ **:** $\mathcal{A}_X = \sigma\left([X = x]_{x \in X(\Omega)}\right) = \left\{\bigsqcup_{x \in A} [X = x] \mid A \subset X(\Omega)\right\}$.

$\boxed{\textbf{D}}$ ⓢⓒ **:** On dit qu'une variable X est **bornée** s'il existe une constante $M \geq 0$ telle que $\forall \omega \in \Omega,\ |X(\omega)| \leq M$.

$\boxed{\textbf{D}}$ **Loi de probabilité** ⓢ **:** $P_X : X(\Omega) \to [0, 1]$, définie par $\forall x \in X(\Omega)$, $P_X(x) = \mathbf{P}([X = x])$.

$\boxed{\textbf{P}}$ **Caractérisation d'une loi**

▶ ⓢ **:** On donne $X(\Omega)$ *ainsi* que toutes les probabilités ponctuelles ou bien la fonction de répartition F_X de X.

▶ ⓒ **:** On donne $X(\Omega)$ *puis* une densité de X ou la fonction de répartition F_X de X.

$\boxed{\textbf{P}}$ Pour toute variable aléatoire X, la fonction de répartition de X est *continue* en $x \in \mathbb{R}$ si, et seulement si, $\mathbf{P}([X = x]) = 0$.

$\boxed{\textbf{P}}$ ⓢ **:** Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{Z}$ alors on a $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{P}([X = k]) = F_X(k) - F_X(k-1)$.

$\boxed{\textbf{P}}$ ⓢⓒ **:** $(X \sim Y) \Leftrightarrow (F_X = F_Y)$

$\boxed{\textbf{P}}$ ⓢⓒ **:** $(X = Y) \Rightarrow (X \sim Y)$ ⚠ la réciproque est fausse !

$\boxed{\textbf{P}}$ ⓢⓒ **:** $(X \sim Y) \Rightarrow \left(\forall k \geq 0,\ \mathbf{E}(X^k) = \mathbf{E}(Y^k)\right)$

$\boxed{\textbf{P}}$ ⓒ **Caractérisation d'une densité**

$$(f \text{ densité}) \Leftrightarrow \left(f \geq 0 \textit{ sur son domaine, } \mathcal{C}^0 \textit{ presque partout, } \int_{-\infty}^{+\infty} f < +\infty \textit{ et vaut } 1\right)$$

$\boxed{\textbf{D}}$ **Fonction de répartition F**

▶ ⓢ **:** $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \sum_{\substack{t \in X(\Omega) \\ t \leq x}} \mathbf{P}([X = t])$.

▶ ⓒ **:** $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$.

$\boxed{\textbf{P}}$ ⓒ **:** $F' = f$ là où F est *dérivable* i.e. là où f est *continue.*

$\boxed{\textbf{Pr}}$ ▶ ⓢⓒ **:** *Dans le cas général* $\lim_{-\infty} F = 0$, $\lim_{+\infty} F = 1$, *F est $\mathcal{C}^0$ à droite en tout point de $\mathbb{R}$, F est croissante au sens large.*

▶ ⓒ : *On rajoute F est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$* et *$\mathcal{C}^1 - I$ (I ensemble fini éventuellement vide) i.e. F est $\mathcal{C}^1$ presque partout.*

$\boxed{\textbf{Pr}}$ ▶ ⓢ **:** $\forall a \in \mathbb{R},\ \mathbf{P}([X = a]) = F_X(a) - F_X(a^-)$.

▶ ⓒ **:** $\forall a \in \mathbb{R},\ \mathbf{P}([X = a]) = 0$.

▶ ⓢ **:** $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ a \leq b,\ \mathbf{P}([a \leq X \leq b]) = F_X(b) - F_X(a^-)$.

▶ ⓢ **:** $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ a \leq b,\ \mathbf{P}([a < X \leq b]) = F_X(b) - F_X(a)$.

▶ ⓢ **:** $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ a \leq b,\ \mathbf{P}([a \leq X < b]) = F_X(b^-) - F_X(a^-)$.

▶ ⓢ **:** $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ a \leq b,\ \mathbf{P}([a < X < b]) = F_X(b^-) - F_X(a)$.

▶ ⓒ **:** $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ a \leq b,\ \mathbf{P}([a \leq X \leq b]) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f(x)\,dx$.

▶ ⓒ **:** $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ a \leq b,\ \mathbf{P}([a < X \leq b]) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f(x)\,dx$.

▶ ⓒ **:** $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ a \leq b,\ \mathbf{P}([a \leq X < b]) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f(x)\,dx$.

▶ ⓒ **:** $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ a \leq b,\ \mathbf{P}([a < X < b]) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f(x)\,dx$.

$\boxed{\textbf{D}}$ ⓒ **:** Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$ on a, $\mathbf{P}([X \in I]) = \int_I f(x)\,dx$.

$\boxed{\textbf{P}}$ $\forall A \subset X(\Omega),\ \mathbf{P}([X \in A]) = \begin{cases} ⓢ : \sum_{x \in A} \mathbf{P}([X = x]) \\ ⓒ : \int_{x \in A} f(x)\,dx \end{cases}$

6.2 Moments

$\boxed{\textbf{E}}$ **Espérance**

$$\mathbf{E}(X) = \begin{cases} Ⓢ: \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbf{P}([X=x]) \text{ ssr } |\text{cv}| \\ ⓒ: \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx \text{ ssr } |\text{cv}| \end{cases}$$

P Ⓢⓒ **:** $(\mathbf{E}(X) < \infty) \Leftrightarrow (\mathbf{E}(|X|) < \infty)$

P Ⓢⓒ **:** Pour tout X variable positive nous avons $(\mathbf{E}(X) < \infty) \Leftrightarrow (\mathbf{E}(\lfloor X \rfloor) < \infty)$.

P Ⓢⓒ **:** Si $X(\Omega)$ possède un maximum $x_{\max}$ et $x_{\min}$, alors $\mathbf{E}(X) < +\infty$ et l'on a : $x_{\min} \leq \mathbf{E}(X) \leq x_{\max}$.

P Ⓢ **:** $\forall a \in \mathbb{R}$, soit X une *variable certaine égale à a* alors $\mathbf{E}(X) = a$, i.e. $\mathbf{E}(a) = a$.

P Ⓢⓒ **:** Si $X \geq 0$ alors $\mathbf{E}(X) \geq 0$.

P Ⓢⓒ **:** $(X \geq 0 \text{ et } \mathbf{E}(X) = 0) \Rightarrow (X = 0 \text{ p.s.})$

P Ⓢⓒ **:** $\left.\begin{array}{l} \mathbf{E}(X) < \infty \\ Y \text{ est bornée} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{E}(XY) < \infty$

T **Théorème de domination**

Ⓢⓒ **:** Soit X et Y deux variables, si $|X| \leq Y$ et si $\mathbf{E}(Y) < \infty$ alors $\mathbf{E}(X) < \infty$ et $|\mathbf{E}(X)| \leq \mathbf{E}(|X|) \leq \mathbf{E}(Y)$.

D **Moment d'ordre r où $r \geq 0$.**

$$m_r(X) = \mathbf{E}(X^r) = \begin{cases} Ⓢ: \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} x^r \mathbf{P}([X=x]) \text{ ssr } |\text{cv}| \\ ⓒ: \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)\,dx \text{ ssr } |\text{cv}| \end{cases}$$

P Ⓢⓒ **:** $(m_2(X) = 0) \Leftrightarrow (X = 0 \text{ p.s.})$

R ⓒ **:** *Dans le cas continu, on pourrait se contenter de la convergence simple puisque l'intégrande ne change de signe qu'en* 0*, mais c'est une histoire de programme !*

P Ⓢⓒ **:** Toute v.a.r. *bornée* admet des moments de tous ordres.

D **Moment absolu d'ordre r où $r \geq 0$.**

$$m_r(|X|) = \mathbf{E}(|X|^r) = \begin{cases} Ⓢ: \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} |x|^r \mathbf{P}([X=x]) \text{ ssrcv} \\ ⓒ: \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^r f(x)\,dx \text{ ssrcv} \end{cases}$$

R ⓒ **:** *Dans le cas continu, on pourrait se contenter de la convergence simple puisque l'intégrande ne change de signe qu'en* 0*, mais c'est une histoire de programme !*

P Ⓢⓒ **:** $(m_r(X) < \infty) \Leftrightarrow (m_r(|X|) < \infty)$

D **Moment centré d'ordre r où $r \geq 0$.**

Soit X une v.a.r. tel que $\mathbf{E}(X) < \infty$

$$\mu_r(X) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))^r) = \begin{cases} Ⓢ: \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} (x - \mathbf{E}(X))^r \mathbf{P}([X=x]) \text{ ssr } |\text{cv}| \\ ⓒ: \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbf{E}(X))^r f(x)\,dx \text{ ssr } |\text{cv}| \end{cases}$$

D Ⓢⓒ **:** $\mathbf{V}(X) = \mu_2(X)$

D Ⓢⓒ **:** $\boldsymbol{\sigma}(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$

P Ⓢⓒ **:** $(\mathbf{V}(X) < \infty) \Leftrightarrow \left(\mathbf{E}\left(X^2\right) < \infty\right)$

P Ⓢⓒ **:** $(\mathbf{V}(X) = 0) \Leftrightarrow (X = \mathbf{E}(X) \text{ p.s.})$

P Ⓢⓒ **:** $\left(\mathbf{E}\left(X^2\right) = 0\right) \Rightarrow (\mathbf{V}(X) = 0)$

P Ⓢⓒ **:** $(X \text{ bornée}) \Rightarrow (\mathbf{V}(X) < \infty)$

P Ⓢⓒ **:** $\left.\begin{array}{l} \mathbf{E}\left(X^2\right) < \infty \\ \mathbf{E}\left(Y^2\right) < \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{E}(XY) < \infty$

T **Théorème de Koenig-Huygens** Ⓢⓒ Soit X tel que $\mathbf{E}\left(X^2\right) < \infty$ alors $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left(X^2\right) - (\mathbf{E}(X))^2$.

P Ⓢⓒ **:** Soit $r \in \mathbb{N}$ alors $(m_{r+1}(X) < \infty) \Rightarrow (\forall k \in [\![0,r]\!],\ m_r(X) < \infty)$.

P Ⓢⓒ **:** Soit $r \in \mathbb{N}$ alors $\left(\mu_{r+1}(X) < \infty\right) \Rightarrow (\forall k \in [\![0,r]\!],\ \mu_r(X) < \infty)$.

T **Théorème de transfert**

$$\mathbf{E}(\varphi(X)) = \begin{cases} Ⓢ: \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} \varphi(x)\mathbf{P}([X=x]) \text{ ssr } |\text{cv}| \text{ où } \varphi \text{ déf sur } I \supset X(\Omega) \\ ⓒ: \displaystyle\int_a^b \varphi(x) f(x)\,dx \text{ ssr } |\text{cv}| \text{ où } X(\Omega) =]a,b[\text{ p.s., } a \text{ et } b \text{ dans } \overline{\mathbb{R}} \\ \text{et } \varphi:]a,b[\to \mathbb{R} \text{ est } \mathcal{C}^0 \text{ presque partout dans }]a,b[\end{cases}$$

P Ⓢⓒ **:** $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, $(\mathbf{E}(X) < \infty) \Leftrightarrow (\mathbf{E}(aX+b) < \infty)$ et $\mathbf{E}(aX+b) = a\mathbf{E}(X) + b$.

P Ⓢⓒ **:** $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, $(\mathbf{V}(X) < \infty) \Leftrightarrow (\mathbf{V}(aX+b) < \infty)$ et $\mathbf{V}(aX+b) = a^2\mathbf{V}(X)$.

D **P** Ⓢⓒ **:** Soit X tel que $\mathbf{E}(X) < \infty$ et $\mathbf{V}(X) < \infty$, $\mathbf{V}(X) \neq 0$ alors $X^* = \dfrac{X - \mathbf{E}(X)}{\sigma(X)}$ est appelée **variable centrée réduite associée à** X.

6.3 Inégalités

Pr Ⓢⓒ **Inégalités de moments**

- $\forall X \in \mathcal{L}^1$, $(X \geq 0) \Rightarrow (\mathbf{E}(X) \geq 0)$ (**positivité de l'espérance**)
- $\forall (X,Y) \in \left(\mathcal{L}^1\right)^2$, $(X \leq Y) \Rightarrow (\mathbf{E}(X) \leq \mathbf{E}(Y))$ (**croissance de l'espérance**)
- $\forall (X,Y) \in \left(\mathcal{L}^1\right)^2$, $(X = Y) \Rightarrow (\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y))$

▶ $\left(\forall Y \in \mathcal{L}^1 \text{ et } X \text{ tel que } |X| \leq Y\right) \Rightarrow (\mathbf{E}(X) < \infty \text{ et } \mathbf{E}(|X|) \leq \mathbf{E}(Y))$
▶ $\forall X \in \mathcal{L}^1$, $|\mathbf{E}(X)| \leq \mathbf{E}(|X|)$ (**inégalité triangulaire**)
▶ $\forall X \in \mathcal{L}^2$, $\mathbf{E}\left(X^2\right) \geq (\mathbf{E}(X))^2$

6.4 Espérance conditionnelle

D Ⓢ **Espérance conditionnelle**
$\forall A \in \mathcal{A}$, $\mathbf{P}(A) \neq 0$, $\mathbf{E}(X \mid A) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbf{P}_A([X = x])$ ssr $|\text{cv}|$.

P Ⓢ **:** $\forall A \in \mathcal{A}$, $\mathbf{P}(A) \neq 0$, $(\mathbf{E}(X) < \infty) \Rightarrow (\mathbf{E}(X \mid A) < \infty)$.

Pr Ⓢ Soit X, Y, Z et T quatre v.a.r.d. et g une fonction de deux variables. Enfin a, b, c trois constantes réelles.
▶ $\forall x \in \mathcal{S}_X$, $\mathbf{E}(c \mid [X = x]) = c$.
▶ $\forall x \in \mathcal{S}_X$, $\mathbf{E}(aZ + bT \mid [X = x]) = a\mathbf{E}(Z \mid [X = x]) + b\mathbf{E}(T \mid [X = x])$ (**linéarité**).
▶ Si $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $\forall x \in \mathcal{S}_X$, $\mathbf{E}(Y \mid [X = x]) = \mathbf{E}(Y)$ et $\forall y \in \mathcal{S}_Y$, $\mathbf{E}(X \mid [Y = y]) = \mathbf{E}(X)$.

R *Ces propriétés restent valables en continu mais sont hors programme.*

P Ⓢ **Formule de l'espérance totale**
Soit $(A_i)_{i \in I}$ un *SCE* tq $\forall i \in I$, $\mathbf{P}(A_i) \neq 0$ alors $\mathbf{E}(X) = \displaystyle\sum_{i \in I} \mathbf{E}(X \mid A_i)\mathbf{P}(A_i)$ ssr $|\text{cv}|$.

D Ⓢ **Fonctions de régression**
Soit X et Y deux variables aléatoires telles que $\mathbf{E}(Y) < \infty$, alors on appelle **fonction de régression de** Y **sur** X, la fonction $g_1 : \mathcal{S}_X \to \mathbb{R}$ définie par $g_1(x) = \mathbf{E}(Y \mid [X = x])$. De même on appelle **fonction de régression de** X **sur** Y, la fonction $g_2 : \mathcal{S}_Y \to \mathbb{R}$ définie par $g_2(y) = \mathbf{E}(X \mid [Y = y])$ à condition que $\mathbf{E}(X) < \infty$.

7 Vecteurs aléatoires discrets

7.1 Famille sommables

Conformément au programme, tout ce suit n'est pas exigible de la part des étudiants et devra être rappelé dans tout sujet de concours.

$\boxed{\textbf{D}}$ *Soit I un ensemble dénombrable indexé par $\mathbb{N}$ sous la forme $I = \{\varphi(n),\ n \in \mathbb{N}\}$ où φ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans I. Si la série $\sum u_{\varphi(n)}$ converge absolument, alors sa somme est indépendante de l'indexation φ et pourra également être notée $\sum\limits_{i \in I} u_i$. On dira alors que la série est absolument convergente ou que* ***la famille $(u_i)_{i\in I}$*** *est sommable.*

$\boxed{\textbf{T}}$ **Le théorème de sommation par paquets**

Soit $I = \bigsqcup\limits_{j\in J} I_j$ un ensemble dénombrable et pour tout j de J, les I_j sont des ensembles dénombrables.

Les assertions suivantes sont ***équivalentes*** *:*

(1) *la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable*

(2) *pour tout $j \in J$, la série $\sum\limits_{k\in I_j} u_k$ converge et la série $\sum\limits_{j} \sum\limits_{k\in I_j} |u_k|$ converge. Dans ce cas nous avons $\sum\limits_{i\in I} u_i = \sum\limits_{j\in J} \sum\limits_{k\in I_j} u_k$.*

$\boxed{\textbf{T}}$ **Cas particulier fondamental : $I = \mathbb{N}^2$**

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition de $\mathbb{N}^2$. Les assertions suivantes sont ***équivalentes*** *:*

(1) *La famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable*

(2) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{i,j} |u_{i,j}|$ où $(i,j) \in I_n$ converge et la série simple $\sum\limits_{n\geq 0} \sum\limits_{(i,j)\in I_n} |u_{i,j}|$ converge aussi.*

Dans ce cas nous avons $\displaystyle\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} u_{i,j} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{(i,j)\in I_n} u_{i,j} \right)$.

$\boxed{\textbf{P}}$ **Produit de deux familles sommables**

Soit I et J deux ensembles dénombrables et soit $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_j)_{j\in J}$ deux familles sommables, alors la série double $\sum\limits_{i,j} u_{i,j}$ est convergente et l'on a

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \left(\sum_{i\in i} u_i \right) \left(\sum_{j\in J} v_j \right).$$

7.2 Couples discrets

Toutes les variables en jeu dans cette sous-section sont définies dans un même espace probabilisé.

$\boxed{\textbf{D}}$ **Loi de probabilité d'un couple**

Soit $C = (X,Y)$. On appelle loi de C l'application $P_C : X(\Omega) \times Y(\Omega) \to [0,1]$ définie par $\forall (x_i, y_i) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $P_C(x_i, y_i) = \mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = p_{i,j}$.

$\boxed{\textbf{D}}$ **Lois marginales**

▶ **Loi de X** : c'est l'application $P_X : X(\Omega) \to [0,1]$ définie par $\forall x_i \in X(\Omega)$, $P_X(x_i) = \mathbf{P}([X = x_i]) = p_{i,\bullet}$.

▶ **Loi de Y** : c'est l'application $P_Y : Y(\Omega) \to [0,1]$ définie par $\forall y_j \in Y(\Omega)$, $P_Y(y_j) = \mathbf{P}([Y = y_j]) = p_{\bullet,j}$.

$\boxed{\textbf{P}}$ **Lois marginales**

▶ **Loi de** $X : \forall x_i \in X(\Omega)$, $\mathbf{P}([X = x_i]) = \displaystyle\sum_{x_i\in X(\Omega)} p_{i,j}$

▶ **Loi de** $Y : \forall y_j \in Y(\Omega)$, $\mathbf{P}([Y = y_j]) = \displaystyle\sum_{y_j\in Y(\Omega)} p_{i,j}$.

$\boxed{\textbf{D}}$ **Lois conditionnelles**

▶ **Loi conditionnelle de X sachant $[Y = y_j]$ avec $\mathbf{P}([Y = y_j]) \neq 0$**

$\mathbf{P}_{[Y=y_j]} : X(\Omega) \to [0,1]$ définie par $\forall x_i \in X(\Omega)$, $\mathbf{P}_{[Y=y_j]}([X = x_i]) = \dfrac{p_{i,j}}{p_{\bullet,j}}$.

▶ **Loi conditionnelle de Y sachant $[X = x_i]$ avec $\mathbf{P}([X = x_i]) \neq 0$**

$\mathbf{P}_{[X=x_i]} : Y(\Omega) \to [0,1]$ définie par $\forall y_j \in Y(\Omega)$, $\mathbf{P}_{[X=x_i]}([Y = y_j]) = \dfrac{p_{i,j}}{p_{i,\bullet}}$.

$\boxed{\textbf{P}}$ **Caractérisation de la loi d'une fonction d'un couple**

Notons $Z = g(X,Y)$. *Caractériser la loi de la v.a.r. Z,* c'est donner $Z(\Omega) = g(X,Y)(\Omega)$ et pour tout z de $Z(\Omega)$:

$$\mathbf{P}([Z = z]) = \sum_{\left\{\substack{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)\\ g(x,y)=z}\right.} \mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y]).$$

$\boxed{\textbf{P}}$ $\forall I \in \mathcal{P}(Z(\Omega))$, $\mathbf{P}([Z \in I]) = \displaystyle\sum_{\left\{\substack{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)\\ g(x,y)\in I}\right.} \mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y])$.

$\boxed{\textbf{T}}$ Ⓢ **Théorème de transfert**

Soit une application φ définie sur $\mathcal{D} \supset X(\Omega) \times Y(\Omega)$,

$\mathbf{E}(\varphi(X,Y)) = \displaystyle\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} \varphi(x,y)\, \mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y])$ ssr |cv| de la série double en jeu.

7.3 Vecteurs discrets de dimension $n \geq 2$

Toutes les variables en jeu dans cette sous-section sont définies dans un même espace probabilisé.

D **Loi d'un vecteur discret de dimension $n \geq 2$**

Soit $V = (X_1, \ldots, X_n)$ alors $P_V : X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega) \to [0,1]$, définie par $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} X_i(\Omega)$, $P_V(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i = x_i]\right)$.

D **Lois marginales de dimension un**

$\forall k \in [\![1, n]\!], \forall x_k \in X_k(\Omega)$, $P_{X_k}(x_k) = \mathbf{P}([X_k = x_k])$.

R ⚠ *Contrairement à ce que l'on pourrait croire, les lois marginales d'un vecteur de dimension n ne sont pas uniquement de dimension un. Elles peuvent être de dimension deux, trois etc ... (à méditer !)*

P $\forall k \in [\![1, n]\!], \forall x_k \in X_k(\Omega)$,

$$\mathbf{P}([X_k = x_k]) = \sum_{(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n) \in \prod_{m \in [\![1,n]\!] - \{k\}} X_m(\Omega)} \mathbf{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n} [X_j = x_j]\right).$$

T **Théorème de transfert**

Soit $V = (X_1, \ldots, X_n)$ et φ une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ (il est *suffisant* d'avoir φ définie sur $V(\Omega)$) alors

$$\mathbf{E}(\varphi(X_1, \ldots, X_n)) = \sum_{(x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)} \varphi(x_1, \ldots, x_n) \mathbf{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n} [X_j = x_j]\right) \text{ ssr } |\text{cv}|.$$

P **Caractérisation de la loi d'une fonction d'un vecteur**

Soit $V = (X_1, \ldots, X_n)$ et φ une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}^n$ contenant $\prod_{i=1}^{n} X_i(\Omega)$, alors la *loi* de $Z = \varphi(V)$ est *caractérisée* par la donnée de $Z(\Omega) \subset \operatorname{Im}(\varphi)$ et par celles de $\mathbf{P}([Z = z]) = \displaystyle\sum_{\substack{(x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega) \\ g(x_1, \ldots, x_n) = z}} \mathbf{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n} [X_j = x_j]\right)$ pour tout z de $Z(\Omega)$.

P Soit $V_1 = (X_1, \ldots, X_n)$ et $V_2 = (Y_1, \ldots, Y_n)$ et g définie sur au moins $V_1(\Omega)$ et $V_2(\Omega)$ alors $(V_1 \sim V_2) \Rightarrow (g(V_1) \sim g(V_2))$.

7.4 Covariance

D Ⓢⓒ **:** Soit $(X, Y) \in (\mathcal{L}^2)^2$, $\operatorname{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))(Y - \mathbf{E}(Y)))$.

R Ⓢⓒ **:** *Cette définition ne sert quasiment jamais au calcul d'une covariance car elle n'est pas très pratique à manipuler.*

R Ⓢⓒ **:** *La covariance entre deux variables aléatoires X et Y est une mesure de liaison entre elles.*

D Ⓢⓒ **:** On dit que deux variables X et Y sont **non corrélées ou décorrélées** lorsque $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0$. ⚠ Cela ne veut pas dire qu'elles sont indépendantes !

R Ⓢⓒ **:** ⚠ *Faites toujours la distinction entre indépendant et non-corrélé. Ne concluez jamais à l'indépendance après avoir obtenu un coefficient de corrélation nul !*

T Ⓢⓒ **Théorème de Koenig**

Soit $(X, Y) \in (\mathcal{L}^2)^2$, $\operatorname{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$.

Pr ▶ Ⓢⓒ **:** $\operatorname{Cov}(X, X) = \mathbf{V}(X) \geq 0$ **(positivité)**

▶ Ⓢⓒ **:** $\operatorname{Cov}(X, Y) = \operatorname{Cov}(Y, X)$ **(symétrie)**

▶ Ⓢⓒ **:** Soit $(X, Y, Z) \in (\mathcal{L}^2)^3$ et $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\operatorname{Cov}(aX + bY, Z) = a \operatorname{Cov}(X, Z) + b \operatorname{Cov}(Y, Z)$ **(linéarité à gauche)**

▶ Ⓢⓒ **:** Soit $(X, Y) \in (\mathcal{L}^2)^2$ et $\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, $\operatorname{Cov}(aX + b, cY + d) = ac \operatorname{Cov}(X, Y)$.

▶ Ⓢⓒ **:** $\forall k \in [\![1, n]\!], \forall \ell \in [\![1, m]\!]$, X_k et $Y_\ell \in \mathcal{L}^2$, λ_k et $\mu_\ell \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{Cov}\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_k, \sum_{\ell=1}^{m} \mu_\ell X_\ell\right) = \sum_{(k,\ell) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]} \lambda_k \mu_\ell (X_k, X_\ell) \text{ (bilinéarité)}$$

R Ⓢⓒ ⚠ *La covariance ne définit pas en général un produit scalaire, sauf si l'on se réduit aux variables de $\mathcal{L}^2$ qui soient centrées et en assimilant variable nulle p.s. et variable nulle.*

7.4.1 Droites de régression

D **P** Ⓢ **Droites de régression**

▶ **Droite de régression de Y en X** Elle est notée Δ et a pour équation : $\widehat{Y} = \left(\dfrac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\mathbf{V}(X)}\right)(X - \mathbf{E}(X)) + \mathbf{E}(Y)$.

▶ **Droite de régression de X en Y** Elle est notée Δ' et a pour équation : $\widehat{X} = \left(\dfrac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\mathbf{V}(Y)}\right)(Y - \mathbf{E}(Y)) + \mathbf{E}(X)$.

R *Ces équations de droite restent valables en continu mais ne sont pas au programme.*

7.4.2 Produit scalaire dans $\mathcal{L}^2$

Pr Ⓢⓒ **:** $\forall (X,Y) \in (\mathcal{L}^2)^2$ et $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$,
$\mathbf{V}(aX+bY) = a^2\mathbf{V}(X) + b^2\mathbf{V}(Y) + 2ab\operatorname{Cov}(X,Y)$.

P Ⓢⓒ **Identité du parallèlogramme**

Soit $(X,Y) \in (\mathcal{L}^2)^2$ alors $\mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) = \dfrac{1}{2}(\mathbf{V}(X+Y) + \mathbf{V}(X-Y))$

P Ⓢⓒ **Identité de polarisation**

Soit $(X,Y) \in (\mathcal{L}^2)^2$ alors,

- ▶ $\operatorname{Cov}(X,Y) = \dfrac{1}{4}(\mathbf{V}(X+Y) + \mathbf{V}(X-Y))$
- ▶ $\operatorname{Cov}(X,Y) = \dfrac{1}{2}((\mathbf{V}(X+Y) - \mathbf{V}(X) - \mathbf{V}(Y)))$
- ▶ $\operatorname{Cov}(X,Y) = \dfrac{1}{2}((\mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(X) - \mathbf{V}(X-Y)))$

P Ⓢⓒ **:** Si $(X_1,\dots,X_n) \in (\mathcal{L}^2)^n$ *indépendantes*, alors $\mathbf{V}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}(X_k)$.

⚠ *La réciproque est fausse.*

7.4.3 Coefficient de corrélation linéaire

D Ⓢⓒ **:** Soit $(X,Y) \in (\mathcal{L}^2)^2$ tq $\mathbf{V}(X) \neq 0$ et $\mathbf{V}(Y) \neq 0$ alors on appelle **coefficient de corrélation linéaire** le nombre réel noté $\rho(X,Y)$ défini par

$$\rho(X,Y) = \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbf{V}(X)\mathbf{V}(Y)}} = \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\boldsymbol{\sigma}(X)\boldsymbol{\sigma}(Y)}.$$

R Ⓢⓒ **:** *Le coefficient de corrélation mesure la qualité d'une relation linéaire entre deux variables X et Y.*

Pr Ⓢⓒ **:** Le coefficient de corrélation est *invariant* par changement d'échelle $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$, $\rho(aX+b, aY+c) = \rho(X,Y)$. Si de plus $d \neq 0$, $|\rho(aX+b, dY+c)| = |\rho(X,Y)|$.

Pr Ⓢⓒ **L'inégalité de Cauchy-Schwarz**

▶ Soit $(X,Y) \in (\mathcal{L}^2)^2$ tq $\mathbf{V}(X) \neq 0$ et $\mathbf{V}(Y) \neq 0$ alors $|\rho(X,Y)| \leq 1$ soit $|\operatorname{Cov}(X,Y)| \leq \boldsymbol{\sigma}(X)\boldsymbol{\sigma}(Y)$.

▶ $(|\rho(X,Y)| = 1) \Leftrightarrow (\exists (a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \mid Y = aX + b \text{ p.s.})$

R Ⓢⓒ **:** *Plus $|\rho(X,Y)|$ est proche de 1, plus l'ajustement linéaire entre X et Y est pertinent.*

7.4.4 Matrice de covariance-variance

D Ⓢ Soit pour tout k de $[\![1,n]\!]$, $X_k \in \mathcal{L}_d^2$, on appelle matrice de **covariance-variance du vecteur aléatoire** $V = (X_1,\dots,X_n)$ *la matrice sysmétrique réelle* de $S_n(\mathbb{R})$ notée Γ_V définie par $\Gamma_V = (\operatorname{Cov}(X_i,X_j))_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$.

R Ⓢ *La matrice de covariance-variance associée à un vecteur nous donne une idée de la **dispersion** du vecteur.*

P ▶ Ⓢ Si les variables $X_1,\dots,X_n$ dont indépendantes, Γ_V est *diagonale* car toutes les covariances $\operatorname{Cov}(X_i,X_j)$ (avec $i \neq j$) sont nulles.

▶ $\forall (a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{V}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = {}^t\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}\Gamma_V \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \geq 0$. La *forme quadratique associée à* Γ_V montre que la matrice Γ_V est *positive* et donc *ses valeurs propres sont positives ou nulles.* Ainsi la matrice de covariance Γ_V est *symétrique positive.*

7.5 Indépendance

7.5.1 Définition et proposition

D Ⓢⓒ **:** $X_1 \perp\!\!\!\perp \dots \perp\!\!\!\perp X_n$ *(on dit que les variables sont indépéndantes ou mutuellement indépendantes)* lorsque pour tous *boréliens de* $\mathbb{R}$ $B_1,\dots,B_n$ on a $\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}[X_i \in B_i]\right) = \prod_{i=1}^{n}\mathbf{P}([X_i \in B_i])$.

P Ⓢⓒ **Deux caractérisations de l'indépendance de v.a.r.**

▶ $(X_1 \perp\!\!\!\perp \dots \perp\!\!\!\perp X_n) \Leftrightarrow$
$\left(\text{Soit } I_1,\dots,I_n,\ n \text{ intervalles de } \mathbb{R},\ \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}[X_i \in I_i]\right) = \prod_{i=1}^{n}\mathbf{P}([X_i \in I_i])\right)$

▶ $(X_1 \perp\!\!\!\perp \dots \perp\!\!\!\perp X_n) \Leftrightarrow \left(\forall (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n, \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}[X_i \leq x_i]\right) = \prod_{i=1}^{n}\mathbf{P}([X_i \leq x_i])\right)$

P Ⓢ **Une caractérisation de l'indépendance de v.a.r. discrètes**

$(X_1 \perp\!\!\!\perp \dots \perp\!\!\!\perp X_n) \Leftrightarrow$
$\left(\forall (x_1,\dots,x_n) \in \prod_{i=1}^{n} X_i(\Omega), \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}[X_i = x_i]\right) = \prod_{i=1}^{n}\mathbf{P}([X_i = x_i])\right)$

P ▶ Ⓢⓒ Soit X une *variable certaine*, alors $\forall Y$ v.a.r. on a $X \perp\!\!\!\perp Y$. Ceci *reste valable* si $X = a$ p.s. $(a \in \mathbb{R})$. Autrement dit toute variable aléatoire certaine ou quasi-certaine est indépendante (au sens du calcul des probabilités) de toute autre variable.

7.5.2 Le lemme des coalition

$\boxed{\mathbf{P}}$ Ⓢⓒ **:** $\forall (X,Y)$ deux variables et $\forall (\varphi,\psi) \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R}) \times \mathcal{F}(J,\mathbb{R}) \mid I \supset X(\Omega)$ et $J \supset Y(\Omega)$ alors $\varphi(X), \psi(Y)$ *restent des variables*, et $(X \perp\!\!\!\perp Y) \Rightarrow (\varphi(X) \perp\!\!\!\perp \psi(Y))$.

⚠ *La réciproque est fausse.*

$\boxed{\mathbf{P}}$ Ⓢⓒ **:** $\forall (X_1,\dots,X_n)$ n variables et $\forall (\varphi,\psi) \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R}) \times \mathcal{F}(Y,\mathbb{R})$ tq $\forall k \in [\![1,n-1]\!]$, $\varphi(X_1,\dots,X_k)$ et $\psi(X_{k+1},\dots,X_n)$ *restent des variables* alors $\forall k \in [\![1,n-1]\!]$, $(X_1 \perp\!\!\!\perp \dots \perp\!\!\!\perp X_n) \Rightarrow (\varphi(X_1,\dots,X_k) \perp\!\!\!\perp \psi(X_{k+1},\dots,X_n))$.

$\boxed{\mathbf{P}}$ Ⓢⓒ **:** $\forall (X_1,\dots,X_n) \in (\mathcal{L}^1)^n$,

$$(X_1 \perp\!\!\!\perp \dots \perp\!\!\!\perp X_n) \Rightarrow \left(\mathbf{E}\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) < \infty \text{ et } \mathbf{E}\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) = \prod_{i=1}^n \mathbf{E}(X_i)\right)$$

$\boxed{\mathbf{P}}$ Ⓢⓒ **:** $\forall (X,Y) \in (\mathcal{L}^2)^n$, $(X \perp\!\!\!\perp Y) \Rightarrow (\mathrm{Cov}(X,Y) = 0)$

⚠ *La réciproque est fausse.*

$\boxed{\mathbf{P}}$ ▶ Ⓢⓒ **:** $\forall (X,Y) \in (\mathcal{L}^2)^2$, $(\mathrm{Cov}(X,Y) \neq 0) \Rightarrow \mathrm{non}(X \perp\!\!\!\perp Y)$

⚠ ▶ Ⓢⓒ **:** $\forall (X,Y) \in (\mathcal{L}^2)^2$, $(\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbf{0}) \Rightarrow \mathbf{?}$

$\boxed{\mathbf{P}}$ Ⓢⓒ **:** $\forall (X,Y) \in (\mathcal{L}^2)^n$, $(X \perp\!\!\!\perp Y) \Rightarrow (\rho(X,Y) = 0)$

⚠ *La réciproque est fausse en général.*

$\boxed{\mathbf{P}}$ ▶ Ⓢⓒ **:** $\forall (X,Y) \in (\mathcal{L}^2)^2$, $(\rho(X,Y) \neq 0) \Rightarrow \mathrm{non}(X \perp\!\!\!\perp Y)$

⚠ ▶ Ⓢⓒ **:** $\forall (X,Y) \in (\mathcal{L}^2)^2$, $(\rho(X,Y) = \mathbf{0}) \Rightarrow \mathbf{?}$

$\boxed{\mathbf{P}}$ Ⓢ **:** $\left(\forall (X,Y) \in (\mathcal{L}^1)^n \text{ et } X \perp\!\!\!\perp Y\right) \Rightarrow \left(\begin{cases} \mathbf{E}(X \mid [Y=y_j]) = \mathbf{E}(X) \\ \mathbf{E}(Y \mid [X=x_i]) = \mathbf{E}(Y) \end{cases}\right)$ où $\forall y_j \in Y(\Omega)$, $\mathbf{P}([Y=y_j]) \neq 0$ et $\forall x_i \in X(\Omega)$, $\mathbf{P}([X=x_i]) \neq 0$.

$\boxed{\mathbf{P}}$ Ⓢⓒ **:** $\forall (X_1,\dots,X_n) \in \mathbb{R}^n$, $\forall (X_1,\dots,X_n) \in (\mathcal{L}^2)^n$,

$$(X_1 \perp\!\!\!\perp \dots \perp\!\!\!\perp X_n) \Rightarrow \left(\mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) < \infty \text{ et } \mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \mathbf{V}(X_i)\right)$$

7.5.3 Convolution

$\boxed{\mathbf{T}}$ Ⓢⓒ ⚠ *Le théorème qui va suivre ne s'emploie qu'en cas de recherche de la loi de la somme de deux v.a.r. X et Y indépendantes.*

▶ Ⓢ Soit X et Y avec $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $\forall z \in (X+Y)(\Omega)$,

$$\mathbf{P}([X+Y=z]) = \sum_{x \mid \left\{\substack{x \in X(\Omega) \\ z-x \in Y(\Omega)}\right.} \mathbf{P}([X=x])\,\mathbf{P}([Y=z-x]).$$

▶ ⓒ Soit X et Y avec $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors la fonction f_{X+Y} définie par

$\forall z \in \mathbb{R}$, $f_{X+Y}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, f_Y(z-t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-t)\, f_Y(t)\, dt$ à condition que f_{X+Y} soit *définie* et $\mathcal{C}^0$ *presque partout*, ce qui est le cas si au moins l'une des deux densités est *bornée* et on note $f_{X+Y} = f_X * f_Y$.

$\boxed{\mathbf{Pr}}$ Ⓢⓒ Le produit de convolution est *commutatif et associatif.*

Autrement dit $f_{X+Y} = f_X * f_Y = f_Y * f_X$ et $(f_X * f_Y) * f_Z = f_X * (f_Y * f_Z)$.

8 Inégalités

8.1 Inégalités de concentration

$\boxed{\mathbf{D}}$ ⓈⒸ On appelle **inégalité de concentration**, toute inégalité donnant une majoration du type (f étant une fonction explicite) $\mathbf{P}([|X - \mathbf{E}(X)| \geq x]) \leq f(x)$.

$\boxed{\mathbf{T}}$ **Inégalité de Markov (I.M.)**

► ⓈⒸ **:** Soit $X \in \mathcal{L}^1$ *à valeurs positives*, alors $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbf{P}([X \geq \varepsilon]) \leq \dfrac{\mathbf{E}(X)}{\varepsilon}$ *(IM à l'ordre* 1*)*

► ⓈⒸ **:** Ce qui *se généralise à l'ordre* r pour $r \in \mathbb{N}^*$, $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbf{P}([X \geq \varepsilon]) \leq \dfrac{\mathbf{E}(X^r)}{\varepsilon^r}$.

$\boxed{\mathbf{T}}$ **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev (I.B.T.)**

► ⓈⒸ **:** Soit $X \in \mathcal{L}^2$ admettant une *variance non nulle*, alors $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbf{P}([|X - \mathbf{E}(X)| \geq \varepsilon]) \leq \dfrac{\mathbf{V}(X)}{\varepsilon^2}$.

$\boxed{\mathbf{R}}$ *Dans le cas où $\varepsilon > 1$, la "morale" est la suivante : plus X admet un moment d'ordre élevé (on dit aussi plus elle est intégrable), plus elle est concentrée autour de sa moyenne.*

8.2 Inégalités de moments

$\boxed{\mathbf{T}}$ **Inégalité de Cauchy-Schwarz**

► ⓈⒸ **:** Soit $(X, Y) \in (\mathcal{L}^2)^2$ alors $\mathrm{Cov}(X, Y) < \infty$ et $(\mathrm{Cov}(X, Y))^2 \leq \mathbf{V}(X)\,\mathbf{V}(Y)$.

D'autres versions

► ⓈⒸ **:** Soit $(X, Y) \in (\mathcal{L}^2)^2$ alors $\mathbf{E}(XY) < \infty$ et $(\mathbf{E}(XY))^2 \leq \mathbf{E}(X^2)\,\mathbf{E}(Y^2)$.

Le cas d'égalité est atteint lorsqu'il existe deux réels a et b non tous les deux nuls tel que $aX + bY = 0$.

► ⓈⒸ **:** Soit $(X, Y) \in (\mathcal{L}^2)^2$ alors $\mathbf{E}(XY) < \infty$ et

$|\mathbf{E}(XY)| \leq \mathbf{E}(|XY|) \leq \sqrt{\mathbf{E}(X^2)\,\mathbf{E}(Y^2)}$.

$\boxed{\mathbf{E}}$ $\mathbf{E}(|X|) \leq \sqrt{\mathbf{E}(X^2)}$

$\boxed{\mathbf{T}}$ **Inégalité triangulaire**

ⓈⒸ **:** Soit X et Y telles que $\mathbf{E}(X) < \infty$ et $\mathbf{E}(Y) < \infty$ alors

$\mathbf{E}(|X + Y|) \leq \mathbf{E}(|X|) + \mathbf{E}(|Y|)$.

9 Convergences

9.1 Convergence en probabilités

$\boxed{\textbf{D}}$ **ⓈⒸ :** $(X_n)_{n\geq 1} \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ lorsque $\forall \varepsilon > 0,\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}([|X_n - X| \geq \varepsilon]) = 0$ soit encore $\forall \varepsilon > 0,\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}([|X_n - X| < \varepsilon]) = 1$.

Toutes les variables en jeu étant définies sur le même espace probabilisé, c'est ce que l'on appelle une convergence spaciale.

$\boxed{\textbf{R}}$ **ⓈⒸ :** $\forall \varepsilon > 0,\ [|X_n - X| \geq \varepsilon] \subset \left[|X_n - X| > \dfrac{\varepsilon}{2}\right]$.

$\boxed{\textbf{Pr}}$ **ⓈⒸ :** $\left((X_n)_{n\geq 1} \xrightarrow{\mathbf{P}} X\right) \Leftrightarrow \left((X_n - X)_{n\geq 1} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0\right)$.

$\boxed{\textbf{Pr}}$ **ⓈⒸ :** $\left((X_n)_{n\geq 1} \xrightarrow{\mathbf{P}} X\right) \not\Rightarrow \left(\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{E}(X_n) = \mathbf{E}(X) \text{ **et** } \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{V}(X_n - X) = 0\right)$

$\boxed{\textbf{D}}$ **ⓈⒸ :** $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{E}(X_n) = a \in \mathbb{R} \textbf{ et } \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{V}(X_n) = 0\right) \Rightarrow \left((X_n)_{n\geq 1} \xrightarrow{\mathbf{P}} a\right)$

$\boxed{\textbf{T}}$ **Théorème de composition**

ⓈⒸ : Si $(X_n)_{n\geq 1} \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ et si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ alors $(f(X_n))_{n\geq 1} \xrightarrow{\mathbf{P}} f(X)$.

$\boxed{\textbf{R}}$ *Il est suffisant d'avoir $f \in \mathcal{C}^0(X(\Omega),\mathbb{R}))$ mais ce n'est pas dit dans le programme.*

$\boxed{\textbf{T}}$ **Loi faible des grands nombres**

▶ **ⓈⒸ :** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une *suite de variables indépendantes, d'espérance commune m et de variance commune σ^2*. Soit $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ alors $\left(\overline{X_n}\right)_{n\geq 1} \xrightarrow{\mathbf{P}} m$.

▶ **Ⓢ :** Si $\forall k \in [\![1,n]\!],\ X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ alors en posant $F_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ on a,

$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbf{P}([|F_n - p| \geq \varepsilon]) \leq \dfrac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \leq \dfrac{1}{4n\varepsilon^2}$.

9.2 Convergence en loi

$\boxed{\textbf{D}}$ **ⓈⒸ :** $(X_n)_{n\geq 1} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ en tout point où F_X est *continue*.

Les fonctions F_{X_n} et F_X représentent la fonction de répartition de X_n (resp. de X), les variables en jeu n'ont pas l'obligation d'être définies sur le même espace. La convergence en loi n'est donc pas une convergence spaciale.

$\boxed{\textbf{P}}$ **ⓈⒸ :** Soit a et b deux réels tel que $a < b$ alors on a,
$\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}([a < X_n \leq b]) = \mathbf{P}([a < X \leq b])$.

$\boxed{\textbf{P}}$ **Ⓢ :** $\left((X_n)_{n\geq 1} \xrightarrow{\mathcal{L}} X\right) \Leftrightarrow \left(\forall k \in \mathbb{Z},\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}([X_n = k]) = \mathbf{P}([X = k])\right)$ où les variables X_n **et** X sont à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

$\boxed{\textbf{R}}$ ⚠ *N'employer cette proposition qu'en cas où vous soyez sûrs de connaître la nature discrète de TOUTES les variables en jeu.*

$\boxed{\textbf{T}}$ **Théorème de composition**

ⓈⒸ : Si $(X_n)_{n\geq 1} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ alors $(f(X_n))_{n\geq 1} \xrightarrow{\mathcal{L}} f(X)$.

$\boxed{\textbf{R}}$ *Il est suffisant d'avoir $f \in \mathcal{C}^0(X(\Omega),\mathbb{R})$ mais ce n'est pas dit dans le programme.*

$\boxed{\textbf{T}}$ **Théorème de Slutsky**

▶ **ⓈⒸ :** $\left.\begin{array}{r} (X_n)_{n\geq 1} \xrightarrow{\mathcal{L}} X \\ (Y_n)_{n\geq 1} \xrightarrow{\mathcal{L}} c \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow (X_n + Y_n)_{n\geq 1} \xrightarrow{\mathcal{L}} X + c$

▶ **ⓈⒸ :** $\left.\begin{array}{r} (X_n)_{n\geq 1} \xrightarrow{\mathcal{L}} X \\ (Y_n)_{n\geq 1} \xrightarrow{\mathcal{L}} c \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow (X_n Y_n)_{n\geq 1} \xrightarrow{\mathcal{L}} cX$

$\boxed{\textbf{R}}$ ⚠ *Slutsky mélange les types de convergence.*

$\boxed{\textbf{T}}$ **Théorème de la limite centrée (TCL)**

▶ **ⓈⒸ :** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ **i.i.d.** alors $(S_n^*)_{n\geq 1} \xrightarrow{\mathcal{L}} N$ où $N \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ où

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $S_n^* = \dfrac{S_n - \mathbf{E}(S_n)}{\sigma(S_n)}$ où $\sigma(S_n) > 0$.

Autrement dit $\forall x \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}([S_n^* \leq x]) = \Phi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$.

Alors en posant $\forall n \geq 1,\ \mathbf{E}(X_n) = \mu$ et $\mathbf{V}(X_n) = \sigma^2$, alors $\left(\dfrac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1} \xrightarrow{\mathcal{L}} N$ où $N \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

▶ **ⓈⒸ :** Le TCL existe aussi en "*version moyenne*", c'est-à-dire qu'en utilisant les même notations et en posant $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ alors

$\left(\overline{X_n}^*\right)_{n\geq 1} = \left(\sqrt{n}\left(\dfrac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma}\right)\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} N$ où $N \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

$\boxed{\textbf{C}}$ **ⓈⒸ :** $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a < b,\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\left[a \leq \dfrac{S_n - n\mathbf{E}(X_1)}{\sqrt{n\mathbf{V}(X_1)}} \leq b\right]\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_a^b e^{-t^2/2} dt$

9.3 Liens entre ces deux types de convergence (HP)

P ▶ Ⓢⓒ **:** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ et X des variables définies sur le même espace probabilisé, alors $\left((X_n)_{n\geq 1} \xrightarrow{\mathbf{P}} X\right) \Rightarrow \left((X_n)_{n\geq 1} \xrightarrow{\mathcal{L}} X\right)$.

▶ Ⓢⓒ **:** $\forall a \in \mathbb{R}$, $\left((X_n)_{n\geq 1} \xrightarrow{\mathbf{P}} a\right) \Leftrightarrow \left((X_n)_{n\geq 1} \xrightarrow{\mathcal{L}} a\right)$.

9.4 Approximations

P **(Binomiale par Poisson)** $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda > 0$, alors $(X_n)_{n\geq 1} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ où $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ (conditions : $n \geq 30$ et $p \leq 0,1$).

P **(Binomiale par Normale)** Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ *indépendantes*, ainsi $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. Alors $(S_n^*)_{n\geq 1} \xrightarrow{\mathcal{L}} N$ où $N \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ avec $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n^* = \dfrac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ (conditions $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $nq \geq 5$).

P **(Poisson par Normale)** Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ *indépendantes*, ainsi $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k \hookrightarrow \mathcal{P}(n\lambda)$. Alors $(S_n^*)_{n\geq 1} \xrightarrow{\mathcal{L}} N$ où $N \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ avec $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n^* = \dfrac{S_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}$ (condition $\lambda \geq 15$).

R *Le programme stipule que les conditions d'approximation devront être systématiquement rappelées dans l'énoncé, mais malgré tout il serait bon d'avoir un ordre de grandeur en tête pour les oraux ...*

10 Estimation inférentielle

10.1 Estimation ponctuelle

10.1.1 Généralités

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \Theta$ où Θ est une partie de $\mathbb{R}$ et $g : \Theta \to \mathbb{R}$. Le but de l'**estimation inférentielle** est celle de l'estimation d'un paramètre $g(\theta)$ d'une loi suivie par une variable X dont on connait la loi générique (mais non les paramètres) appartenant à une famille de loi notée μ_θ.

$\boxed{\mathbf{D}}$ ⓈⒸ **:** On appelle un ***n*−échantillon** $(X_1, \ldots, X_n)$ **d'une variable** X *dont on cherche à estimer un ou des paramètres de sa loi (connue)*, un vecteur aléatoire de dimension n constitué de variables X_k **i.i.d.** suivant toutes la loi de X.

$\boxed{\mathbf{D}}$ ⓈⒸ **:** Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un $n-$échantillon de X, et $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. On appelle **statistique** ou **estimateur** de $g(\theta)$ toute suite de variables aléatoires $(T_n)_{n\geq 1}$ où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = \varphi(X_1, \ldots, X_n)$ est *indépendante de* θ et dont les valeurs appartiennent à $g(\Theta)$.

$\boxed{\mathbf{D}}$ ⓈⒸ **:** On appelle **estimation de** $g(\theta)$ toute réalisation de la variable T_n soit $\varphi(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ où $\omega \in \Omega$.

$\boxed{\mathbf{D}}$ ⓈⒸ **:** On dit qu'un estimateur est **convergent** ou **consistant** lorsque $(T_n)_{n\geq 1} \xrightarrow{\mathbf{P}} g(\theta)$.

$\boxed{\mathbf{D}}$ ⓈⒸ **: Biais d'un estimateur T_n par rapport à** $g(\theta)$.

ⓈⒸ **:** C'est un réel noté $b_\theta(T_n)$ définit par $b_\theta(T_n) = \mathbf{E}(T_n - g(\theta))$.

► ⓈⒸ **:** Si $\forall \theta \in \Theta$, $b_\theta(T_n) = 0$ on dit que l'**estimateur est sans biais**.

► ⓈⒸ **:** Si $\forall \theta \in \Theta$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_\theta(T_n) = 0$ on dit que l'**estimateur est asymptotiquement sans biais**.

$\boxed{\mathbf{P}}$ **Conditions suffisantes qu'un estimateur soit convergent ou consistant**

► ⓈⒸ **:** $\left(b_\theta(T_n) = 0 \text{ et } \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{V}(T_n) = 0\right) \Rightarrow \left((T_n)_{n\geq 1} \xrightarrow{\mathbf{P}} g(\theta)\right)$.

► ⓈⒸ **:** $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} b_\theta(T_n) = 0 \text{ et } \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{V}(T_n) = 0\right) \Rightarrow \left((T_n)_{n\geq 1} \xrightarrow{\mathbf{P}} g(\theta)\right)$.

$\boxed{\mathbf{D}}$ **Risque quadratique moyen**

ⓈⒸ **:** C'est le nombre réel noté $r_\theta(T_n)$ défini par

$\forall \theta \in \Theta$, $r_\theta(T_n) = \mathbf{E}_\theta\left((T_n - g(\theta))^2\right)$

$\boxed{\mathbf{P}}$ ⓈⒸ **:** $\forall \theta \in \Theta$, $r_\theta(T_n) = \mathbf{E}_\theta\left((T_n - g(\theta))^2\right)$

$\boxed{\mathbf{P}}$ ⓈⒸ **:** $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} r_\theta(T_n) = 0\right) \Rightarrow \left((T_n)_{n\geq 1} \xrightarrow{\mathbf{P}} g(\theta)\right)$

$\boxed{\mathbf{P}}$ ⓈⒸ **:** $\forall \theta \in \Theta$, $r_\theta(T_n) = \mathbf{V}_\theta(T_n) + b_\theta^2(T_n)$

$\boxed{\mathbf{P}}$ ⓈⒸ **:** $\forall \theta \in \Theta$, $(r_\theta(T_n) = \mathbf{V}_\theta(T_n)) \Leftrightarrow (b_\theta(T_n) = 0)$

$\boxed{\mathbf{P}}$ ⓈⒸ **:** $\forall \theta \in \Theta$, $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} r_\theta(T_n) = 0\right) \Leftrightarrow \left(\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{V}_\theta(T_n) = 0 \text{ et } \lim\limits_{n\to+\infty} b_\theta(T_n) = 0\right)$

10.1.2 Exemples d'estimateurs de paramètres usuels et sans biais et convergents

10.1.2.1 Moyenne empirique

Situation : Soit une variable X suivant une loi d'*espérance inconnue* $\mu \in \mathbb{R}$ mais de variance $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+^*$ *connue*.

$\boxed{\mathbf{D}}$ ⓈⒸ **:** Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un $n-$échantillon de X d'*espérance inconnue* X, on appelle **moyenne empirique** la variable aléatoire $\overline{X_n}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ où $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbf{E}_\mu(X_k) = \mu$ (*inconnue*).

$\boxed{\mathbf{P}}$ ⓈⒸ **:** $\forall \mu \in \mathbb{R}$, $\mathbf{E}_\mu\left(\overline{X_n}\right) = \mu$ et $\mathbf{V}_\mu\left(\overline{X_n}\right) = \dfrac{\sigma^2}{n}$.

$\boxed{\mathbf{P}}$ ► Ⓒ **:** $\left(\forall k \in [\![1, n]\!],\ X_k \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)\right) \Rightarrow \left(\overline{X_n} \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)\right)$ où $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+^*$.

► ⓈⒸ **:** $\left(\forall k \in [\![1, n]\!],\ X_k \not\hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)\right) \Rightarrow \left(\overline{X_n} \underset{\simeq}{\hookrightarrow} \mathcal{N}\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)\right)$ par le **TCL** pour n grand où $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+^*$.

$\boxed{\mathbf{P}}$ ⓈⒸ **:** $\left(\overline{X_n}\right)_{n\geq 1} \xrightarrow{\mathbf{P}} \mu$.

10.1.2.2 Fréquence empirique

Situation : Soit une variable aléatoire X tel que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ où p est un réel de $]0,1[$ *inconnu* donc à estimer.

$\boxed{\mathbf{D}}$ Ⓢ **:** Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un $n-$échantillon de $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ d'espérance *inconnue* p On appelle **fréquence empirique** la variable aléatoire F_n définie par

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $F_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ avec $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ où p est *inconnu*.

$\boxed{\mathbf{P}}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall p \in]0,1[$, $\mathbf{E}_p(F_n) = p$ et $\mathbf{V}_p(F_n) = \dfrac{p(1-p)}{n}$.

$\boxed{\mathbf{P}}$ $F_n \underset{\simeq}{\hookrightarrow} \mathcal{N}\left(p, \dfrac{p(1-p)}{n}\right)$ par le **TCL** pour n grand, $np \geq 5$ et $np(1-p) \geq 5$.

$\boxed{\mathbf{P}}$ $(F_n)_{n\geq 1} \xrightarrow{\mathbf{P}} p$.

10.1.2.3 Variance empirique

Situation : Soit une variable X suivant une loi d'espérance connue $\mu \in \mathbb{R}$ mais de *variance inconnue* $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+^*$.

D Ⓢ **:** Soit $(X_1,\dots,X_n)$ un $n-$échantillon tel que $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\mathbf{E}(X_k)=\mu$ et $\mathbf{V}(X_k)=\sigma^2$ *inconnu.* On appelle **variance empirique** la variable aléatoire S_n^2 définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(X_k-\overline{X_n}\right)^2$.

P ⓈⒸ **:** $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k^2 - \left(\overline{X_n}\right)^2$ *(à savoir retrouver).*

P ⓈⒸ **:** $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall \sigma \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathbf{E}\left(S_n^2\right) = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)\sigma^2$ *(à savoir retrouver).*

P ⓈⒸ **:** $\left(\left(\dfrac{n-1}{n}\right)S_n^2\right) \xrightarrow{\mathbf{P}} \sigma^2$ *(à savoir retrouver).*

10.2 Estimation par intervalle de confiance

D ⓈⒸ **:** L'intervalle aléatoire $[U_n,V_n]$ est **intervalle de confiance de** $g(\theta)$ **au niveau de confiance** $1-\alpha$ **(ou de risque** α**)** si $\mathbf{P}([U_n,V_n]\ni g(\theta)) \geq 1-\alpha$ où U_n et V_n sont deux estimateurs $g(\theta)$. Sa réalisation est l'estimation de cet intervalle de confiance.

R *Un intervalle de confiance peut se construire à l'aide de plusieurs outils : IM, IBT, méthode analytique (polynôme) ou à l'aide d'autres inégalités améliorant les deux premières citées. Toutes ces méthodes sont déjà tombées au cours des années.*

D ⓈⒸ **:** L'intervalle aléatoire $[U_n,V_n]$ est **intervalle de confiance asymptotique de** $g(\theta)$ **au niveau de confiance** $1-\alpha$ **(ou de risque** α**)** si il existe une suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ telle que $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ soit convergente vers α et $\mathbf{P}([U_n,V_n]\ni g(\theta)) \geq 1-\alpha_n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbf{P}([U_n,V_n]\ni g(\theta)) \geq 1-\alpha$ où U_n et V_n sont deux estimateurs $g(\theta)$.

R *Un intervalle asymptotique s'obtient donc par une limite via le TCL ou bien par encadrement à partir de l'IM soit l'IBT voire d'autres inégalités présentées dans le sujet.*

10.2.1 Estimation par intervalle de confiance d'une proportion

10.1.2.1 Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

P $IC_\alpha(p) = \left[\ F_n - \dfrac{1}{2\sqrt{n\alpha}} \quad ; \quad F_n + \dfrac{1}{2\sqrt{n\alpha}}\ \right]$

10.1.2.2 Par le théorème de la limite centrée

P $IC_\alpha(p) = \left[\ F_n - u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}} \quad ; \quad F_n + u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}}\ \right]$

où $u_{1-\alpha/2} = \Phi^{-1}(1-\alpha/2)$

et $IC_\alpha(p) \subset \left[\ F_n - \frac{u_{1-\alpha/2}}{2\sqrt{n}} \quad ; \quad F_n + \frac{u_{1-\alpha/2}}{2\sqrt{n}}\ \right]$

à condition que $\min(nu_n, nv_n, n(1-u_n), n(1-v_n)) \geq 5$.

10.2.2 Estimation par intervalle de confiance asymptotique d'une moyenne de loi normale de variance donnée

P $IC_\alpha(\mu) = \left[\ \overline{X_n} - u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad ; \quad \overline{X_n} + u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \right]$ où $u_{1-\alpha/2} = \Phi^{-1}(1-\alpha/2)$ à condition que $n \geq 30$. Dans le cas ou σ est *inconnu,* on pourra l'estimer par la réalisation de $\sqrt{\dfrac{n}{n-1}}S_n$ notée s dans l'échantillon, ce qui donne

$IC_\alpha(\mu) = \left[\ \overline{X_n} - u_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} \quad ; \quad \overline{X_n} + u_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\ \right]$

11 Zoologie des lois usuelles du programme

Les lois sont classées par ordre alphabétique.

11.1 Loi de Bernoulli Ⓢ

▶ **Notation :** $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0,1[$
▶ **Paramètre :** p
▶ **Epreuve type :** épreuve amenant *deux issues* seulement : soit succès soit échec.
▶ $X(\Omega) = \{0,1\}$
▶ $\mathbf{P}([X=0]) = 1-p$ et $\mathbf{P}([X=1]) = p$
▶ $\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ 1-p & \text{si} \quad x \in [0,1[\\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$
▶ $\mathbf{E}(X) = p$
▶ $\mathbf{V}(X) = p(1-p)$
▶ $(X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)) \Leftrightarrow (1-X \hookrightarrow \mathcal{B}(1-p))$
▶ $(X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)) \Leftrightarrow (X \hookrightarrow \mathcal{B}(1,p))$
▶ $X_1,\ldots,X_n$ i.i.d. $(\forall k \in [\![1,n]\!],\ X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p)) \Rightarrow \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)\right)$

11.2 Variable indicatrice Ⓢ

$\boxed{\mathbf{D}}$ $\forall A \in \mathcal{A},\ \mathbf{1}_A = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \overline{A} \\ 1 & \text{si} \quad A \end{cases}$

$\boxed{\mathbf{R}}$ *Par définition une variable est donc une variable de Bernoulli.*
▶ **Notation :** $\mathbf{1}_A$
▶ **Paramètre :** $\mathbf{P}(A)$
▶ **Epreuve type :** épreuve de Bernoulli.
▶ $\mathbf{1}_A(\Omega) = \{0,1\}$
▶ $\mathbf{P}(\mathbf{1}_A = 1) = \mathbf{P}(A)$ et $\mathbf{P}(\mathbf{1}_A = 0) = \mathbf{P}(\overline{A})$
▶ $\forall x \in \mathbb{R},\ F_{\mathbf{1}_A}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ 1-\mathbf{P}(A) & \text{si} \quad x \in [0,1[\\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$
▶ $\mathbf{E}(\mathbf{1}_A) = \mathbf{P}(A)$
▶ $\mathbf{V}(\mathbf{1}_A) = \mathbf{P}(A)(1-\mathbf{P}(A))$
▶ $\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$ *(ce qui se généralise par récurrence)*
▶ $\forall n \geq 1,\ (\mathbf{1}_A)^n = \mathbf{1}_A$
▶ $\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$
▶ $\mathbf{1}_{A\Delta B} = |\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B|$

11.3 Loi binomiale Ⓢ

▶ **Notation :** $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$
▶ **Paramètre :** n et p
▶ **Epreuve type :** succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.
▶ $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$
▶ $\forall k \in [\![0,n]\!],\ \mathbf{P}([X=k]) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
▶ $\mathbf{E}(X) = np$
▶ $\mathbf{V}(X) = np(1-p)$
▶ $(X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)) \Leftrightarrow (n-X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,1-p))$
▶ $(X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)) \Leftrightarrow (X \hookrightarrow \mathcal{B}(1,p))$
▶ $X_1,\ldots,X_n$ i.i.d. $(\forall k \in [\![1,n]\!],\ X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p)) \Rightarrow \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)\right)$
▶ $\mathcal{B}(n_1,p) * \cdots * \mathcal{B}(n_\ell,p) \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} n_k, p\right)$ (*stabilité pour la somme de la loi binomiale pour des variables indépendantes*).
▶ **Approximations**
▷ $(X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ et $n \geq 30,\ p < 0,1) \Rightarrow \left(X \underset{\simeq}{\hookrightarrow} \mathcal{P}(np)\right)$
▷ $\left.\begin{array}{r} X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p) \\ n \geq 30,\ np \geq 5,\ np(1-p) \geq 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(X \underset{\simeq}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(np, np(1-p))\right)$

11.4 Loi de Dirac (ou loi certaine) Ⓢ

▶ **Notation :** $X \hookrightarrow \delta_c$ où $c \in \mathbb{R}$
▶ **Paramètre :** c
▶ **Epreuve type :** numéro associée à une boule tirée d'une urne ne contenant que des boubles portant le numéro c.
▶ $X(\Omega) = \{c\}$
▶ $\mathbf{P}(X=c) = 1$
▶ $\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<c \\ 1 & \text{si} \quad x \geq c \end{cases}$
▶ $\mathbf{E}(X) = c$
▶ $\mathbf{V}(X) = 0$
▶ $(\mathbf{V}(X) = 0) \Leftrightarrow (X \hookrightarrow \delta_c$ p.s.$)$
▶ $\left(\mathbf{E}(X^2) = 0\right) \Leftrightarrow (X \hookrightarrow \delta_0$ p.s.$)$
▶ Toute variable certaine est indépendante de toute autre, y compris d'elle-même.

11.5 Loi exponentielle ©

- **Notation :** $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ où $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$
- **Paramètre :** λ
- **Epreuve type :** temps d'attente entre deux phénomènes indépendants tels que des arrivées à un guichet, ou des appels téléphoniques ...
- $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$ p.s.
- $\forall x \in \mathbb{R},\ f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \left(1 - e^{-\lambda x}\right) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$
- $\mathbf{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda}$
- $\mathbf{V}(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$
- $(X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)) \Leftrightarrow \left(\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2,\ \mathbf{P}_{[X>x]}([X > x+y]) = \mathbf{P}([X > y])\right)$ *(absence de mémoire), autrement dit ce qui s'est passé sur l'intervalle de* $]-\infty, x]$ *n'affecte en rien ce qui se passera sur l'intervalle* $]x, x+y]$.
- $\forall a > 0,\ (X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)) \Leftrightarrow \left(aX \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\dfrac{\lambda}{a}\right)\right)$
- $\forall \lambda > 0,\ (X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)) \Leftrightarrow \left(\dfrac{X}{\lambda} \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)\right)$
- $\forall \lambda > 0,\ (X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)) \Leftrightarrow (\lambda X \hookrightarrow \mathcal{E}(1))$
- $\mathcal{E}(1) = \gamma(1)$

11.6 Loi gamma ©

- **Notation :** $X \hookrightarrow \gamma(\upsilon)$ avec $\upsilon \in \mathbb{R}_+^*$
- **Paramètre :** υ
- $X(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$ p.s.
- $\forall x \in \mathbb{R},\ f_X(x) = \dfrac{x^{\upsilon-1} e^{-x}}{\Gamma(\upsilon)} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$
- $\mathbf{E}(X) = \upsilon$
- $\mathbf{V}(X) = \upsilon$
- $\gamma(1) = \mathcal{E}(1)$
- $\gamma(\upsilon_1) * \cdots * \gamma(\upsilon_n) = \gamma\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \upsilon_k\right)$

11.7 Loi géométrique Ⓢ

- **Notation :** $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ où $p \in]0,1[$
- **Paramètre :** p
- **Epreuve type :** c'est le rang d'appartition du premier succès lors d'une succession illimitée d'épreuves de Bernoulli.
- $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$
- $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}([X = k]) = q^{k-1} p$ avec $q = 1 - p$
- $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}([X > k]) = q^k$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - q^k & \text{si } x \in [k, k+1[,\ k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$
- $\mathbf{E}(X) = \dfrac{1}{p}$
- $\mathbf{V}(X) = \dfrac{q}{p^2}$
- $(X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)) \Leftrightarrow \left(\forall (n,m) \in (\mathbb{N})^2,\ \mathbf{P}_{[X>n]}([X > n+m]) = \mathbf{P}([X > m])\right)$ (*absence de mémoire*) ce qui s'est passé sur l'intervalle $]-\infty, n]$ n'affecte en rien ce qui se passera sur l'intervalle $]n, n+m]$.

11.8 Lois normales

11.8.1 Loi normale centrée et réduite ou de Laplace-Gauss centrée et réduite ©

- **Notation :** $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$
- **Paramètre :** 0 et 1
- $X(\Omega) = \mathbb{R}$ p.s.
- $\forall x \in \mathbb{R},\ f_X(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$
- **Intégrale de Gauss**
  - ▷ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = 1$
  - ▷ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 1$
- **Fonction de répartition**
  - ▷ $\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$
  - ▷ $\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$
  - ▷ $\Phi(0) = 1/2$
- **Mode :** 0
- **Médiane :** 0
- $\mathbf{E}(X) = 0$
- $\mathbf{V}(X) = 1$
- $\left(\dfrac{X - m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)\right) \Leftrightarrow \left(X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)\right)$

▶ $\underbrace{\mathcal{N}(0,1) * \cdots * \mathcal{N}(0,1)}_{n \text{ fois}} = \mathcal{N}(0,n)$ **(Stabilité pour la somme de la loi normale dans le cadre de variables indépendantes)**

▶ **Approximation :** $\left((X_n)_{n\geq 1}\ \ i.i.d.\right) \Rightarrow \left(\dfrac{\sum_{k=1}^{n} X_k - \mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)}{\sqrt{\mathbf{V}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)}}\right)_{n\geq 1} \xrightarrow{\mathcal{L}} N$ où $N \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ (TCL)

11.8.2 Loi normale quelconque ou de Laplace-Gauss ©

▶ **Notation :** $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m,\sigma^2\right)$ où $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$
▶ **Paramètre :** m et σ^2
▶ $X(\Omega) = \mathbb{R}$ p.s.
▶ $\forall x \in \mathbb{R},\ f_X(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$
▶ **Mode :** m
▶ **Médiane :** m
▶ $\mathbf{E}(X) = m$
▶ $\mathbf{V}(X) = \sigma^2$
▶ $\left(X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m,\sigma^2\right)\right) \Leftrightarrow \left(\dfrac{X-m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)\right)$ **(Théorème fondamental de la loi normale)**

▶ $\mathcal{N}\left(m_1,\sigma^{12}\right) * \cdots * \mathcal{N}\left(m_n,\sigma_n^2\right) = \mathcal{N}\left(\sum_{k=1}^{n} m_k, \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2\right)$ **(Stabilité pour la somme de la loi normale dans le cadre de variables indépendantes)**

11.9 Loi de Poisson Ⓢ

▶ **Notation :** $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ où $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$
▶ **Paramètre :** λ
▶ **Epreuve type :** nombre d'apparitions d'un phénomène rare durant un intervalle de temps donné.
▶ $X(\Omega) = \mathbb{N}$
▶ $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}([X=k]) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$
▶ $\mathbf{E}(X) = \lambda$
▶ $\mathbf{V}(X) = \lambda$
▶ $\mathcal{P}(\lambda_1) * \cdots * \mathcal{P}(\lambda_n) = \mathcal{P}\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right)$ **(Stabilité pour la somme de la loi de Poisson dans le cadre de variables indépendantes)**

▶ **Approximation :** $\left.\begin{array}{r} X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda) \\ \lambda \geq 15 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(X \underset{\simeq}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(\lambda,\lambda)\right)$

11.10 Lois uniformes

11.10.1 Loi uniforme discrète Ⓢ

▶ **Notation :** $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1,n \rrbracket)$
▶ **Paramètre :** $\llbracket 1,n \rrbracket$
▶ **Epreuve type :** numéro d'une tirée d'une constituée de boules numérotées de 1 à n.
▶ $X(\Omega) = \llbracket 1,n \rrbracket$
▶ $\forall k \in \llbracket 1,n \rrbracket,\ \mathbf{P}([X=k]) = \dfrac{1}{n}$
▶ $\mathbf{E}(X) = \dfrac{n+1}{2}$
▶ $\mathbf{V}(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$
▶ Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket a,b \rrbracket)$ avec $a<b$ alors $X-a+1 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1,b-a+1 \rrbracket)$ et $\mathbf{E}(X) = \dfrac{a+b}{2}$ et $\mathbf{V}(X) = \dfrac{(b-a+1)^2-1}{12}$.

11.10.2 Loi uniforme continue ©

▶ **Notation :** $X \hookrightarrow \mathcal{U}(I)$ où I est un intervalle d'extrémités a et b deux réels tel que $a<b$.
▶ **Paramètre :** I
▶ $X(\Omega) = I$ p.s.
▶ $\forall x \in \mathbb{R},\ f_X(x) = \left(\dfrac{1}{b-a}\right) \mathbf{1}_I(x)$
▶ $\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si} \quad x \in [a,b] \\ 1 & \text{si} \quad x>b \end{cases}$
▶ $\mathbf{E}(X) = \dfrac{a+b}{2}$
▶ $\mathbf{V}(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$
▶ $(X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])) \Leftrightarrow \left(\forall (a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ a+(b-a)X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])\right)$
▶ $(X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])) \Leftrightarrow \left(\dfrac{X-a}{b-a} \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])\right)$

► $(X \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[)) \Leftrightarrow \left(-\dfrac{1}{\lambda}\ln(X) \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)\right)$

11.11 Bilan de la stabilité par convolution

► $\mathcal{B}(n_1,p) * \mathcal{B}(n_2,p) = \mathcal{B}(n_1+n_2,p)$
► $\mathcal{P}(\lambda_1) * \mathcal{P}(\lambda_2) = \mathcal{P}(\lambda_1+\lambda_2)$
► $\gamma(\upsilon_1) * \gamma(\upsilon_2) = \gamma(\upsilon_1+\upsilon_2)$
► $\mathcal{N}\left(m_1,\sigma_1^2\right) * \mathcal{N}\left(m_2,\sigma_2^2\right) = \mathcal{N}\left(m_1+m_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)$

11.12 Bilan des lois sans mémoire

► Ⓢ **:** Les seules variables à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ qui ont la propriété d'être sans mémoire, c'est-à-dire vérifiant : $\forall (n,m) \in (\mathbb{N})^2$, $\mathbf{P}([X > n+m]) = \mathbf{P}([X > m])\,\mathbf{P}([X > n])$ sont les variables géométriques.

► Ⓒ **:** Les seules variables à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ qui ont la propriété d'être sans mémoire, c'est-à-dire vérifiant : $\forall (s,t) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $\mathbf{P}([X > n+m]) = \mathbf{P}([X > m])\,\mathbf{P}([X > n])$ sont les variables exponentielles.

12 Quelques outils

- $\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$ où $|t| < 1$
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-t)^n = \frac{1}{1+t}$ où $|t| < 1$
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k-1}{k-1} t^n = \frac{1}{(1-t)^k}$ où $|t| < 1$
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ où $x \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle e^{tX} + e^{-tX} = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tX)^{2n}}{(2n)!}$ (*à savoir retrouver*)
- $\displaystyle e^{tX} - e^{-tX} = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tX)^{2n+1}}{(2n+1)!}$ (*à savoir retrouver*)
- $\displaystyle\Gamma : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$
- $\displaystyle\binom{n}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$ où k est entier *fixé*.
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{-n}\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$ (**HP** *à savoir retrouver*)